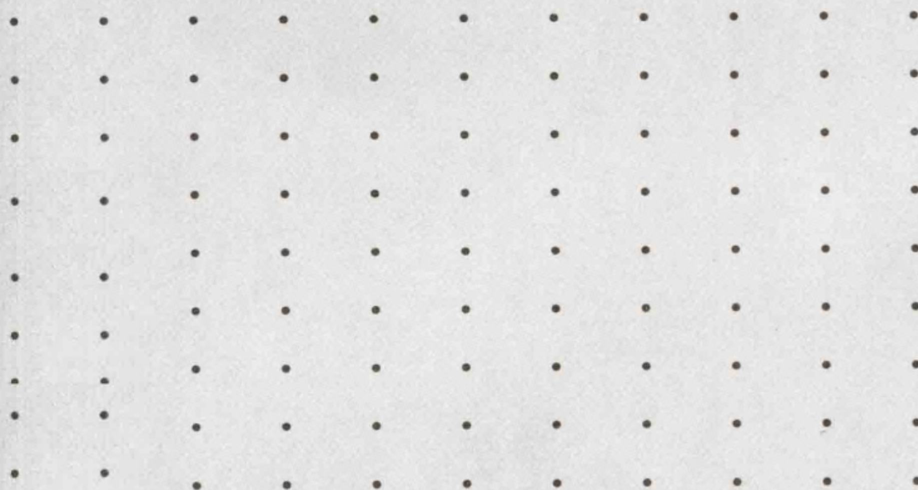
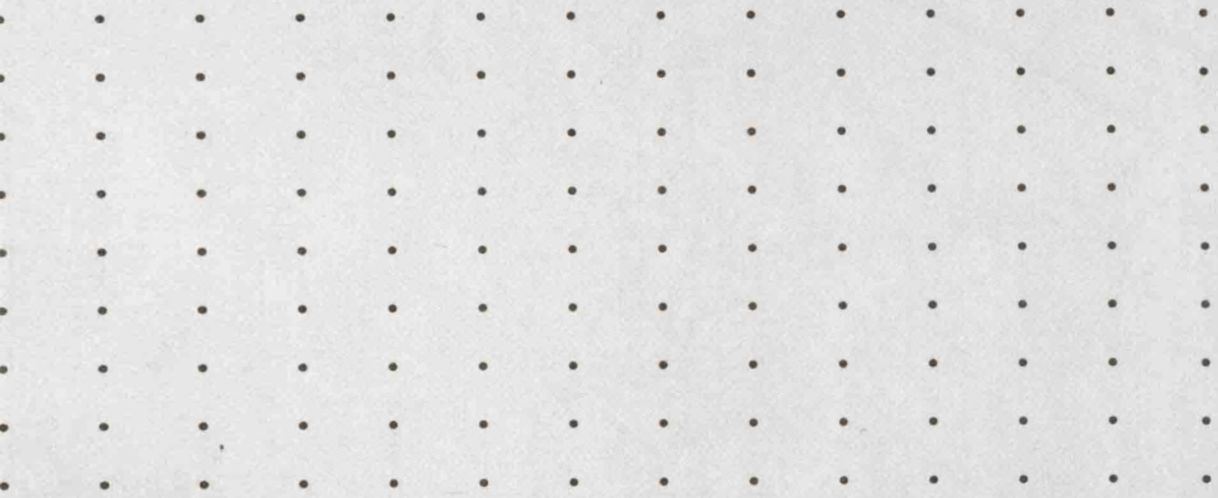
现代数学基础

39 实分析中的反例

汪 林



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



ISBN 978-7-04-038651-6

9 787040 386516 >

定价 49.00 元

■ 学科类别：数学

academic.hep.com.cn

现代数学基础

39

实分析中的反例

汪　林

SHIFENXI ZHONG DE FANLI



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书汇集了实分析中的大量反例，主要内容有集合、函数、微分、Riemann 积分、无穷级数、一致收敛、Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分、有界变差函数和绝对连续函数。对平面点集、二元函数和二重积分方面的反例也做了介绍。

本书可供高等学校数学类各专业的本科生、研究生以及教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

实分析中的反例 / 汪林编著. -- 北京 : 高等教育出版社, 2014.1

ISBN 978-7-04-038651-6

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①汪… Ⅲ. ①实分析—研究 Ⅳ. ① O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 246556 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫　　封面设计 赵阳
版式设计 杜微言　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 25.25
字　　数 530 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014 年 1 月第 1 版
印　　次 2014 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元

物 料 号 38651-00

序言

在数学的教学和研究中，经常需要用反例来说明某个命题不真. 而绝大多数的数学书籍，主要是致力于证明在某些条件下某一结论是真，很少谈到在另一些条件下某一结论是真还是错误的. 即用来说明某些命题不真的反例则较少，这不利于学习的深入. 因此，比较系统地汇集某个数学分支的反例，以弥补这方面的不足，无疑是很有益的. 基于这一想法，作者把多年来在教学实践中积累的实分析方面的反例，重新加以整理、补充而编成了本书.

为了适合不同程度的读者的需要，本书编入了不同难易程度的各种例子. 因而，即便是刚学完初等微积分的读者，也能从书中有所得益; 而某些较难的例子 (在本书的题号上加 * 号)，甚至对专家来说，也不失其参考价值. 本书所指的反例，它的含义比较广泛，譬如，“无处单调的绝对连续函数” 就是 “每个绝对连续函数必在某个非空子区间上单调” 这一命题不成立的一个反例.

本书的取材，主要是从各种有关的书籍以及散见在各种数学杂志上的反例中挑选出来的; 也有一些例子是作者在教学实践中提出并构造出来的; 另外，也有部分例子取自 B. R. Gelbaum 和 J. M. H. Olmsted 合著的 *Counterexamples in Analysis* 一书 (有中译本，高枚译). 阅读本书所需的预备知识，编者假定读者已经掌握，因此，书中只准备了很少的说明. 每一章都以引言开始，用来明确所用的记号、术语和定义，也陈述了一些有关的定理，这些定理或者是构造某些反例时要用到，或者是为了衬托某个反例. 此外，在许多例子的后面，以 “注” 的形式把这个反例与某个正面的命题相比较，以便读者更好地了解到这个命题的条件所起的作用和所举反例的意义.

中国科学院学部委员、业师程民德教授仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而又十分宝贵的意见; A. C. Thompson 教授① 给作者以很大的鼓励，并提供了一些例子; 云南大学卫念祖教授、陶锟教授始终关怀本书的编写和支持; 杨华康、杨富

①A. C. Thompson 系加拿大数学教授，1979 年 9 月至 1980 年 7 月曾在我国讲学，并在南京大学主持了一个泛函分析讨论班.

春、丁彦恒、李小娥、刘正荣等同志阅读了本书的部分书稿, 并提出了许多有益的建议; 本书的责任编辑同志仔细地审读了书稿全文, 并且对本书各个部分作了核对, 对他提出的意见, 作者也作了考虑.

对上面提到的所有的人, 作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限, 加之定稿时间匆促, 一定存在不少缺点, 殷切期望专家和读者予以批评指教.

汪林

初稿 1983 年 3 月

定稿 1985 年 7 月于云南大学

在学习和研究数学的过程中, 经常需要从正面肯定某个命题的成立, 或从反面否定某个命题不成立, 从而更有利于学习的深入. 因此本书自出版发行后, 就受到读者的欢迎和好评, 经有关专家推荐再版. 出版社对书中的部分疏漏进行了修正. 由于作者的水平有限, 书中仍有可能存在不妥之处, 敬请专家和读者予以批评和指正.

汪林

2013 年 10 月于昆明

现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林

目　录

第一章

集合

---

0. 引言.

在这里及今后, 每章开始时, 我们先介绍一些定义和记号, 并陈述一些有关的命题, 它们对于了解本书各章的内容是必不可少的.

设 A 是某些对象的任一集合 (简称集), 若 a 是 A 的元素 (简称元), 则记为 $a \in A$. 若 a 不是 A 的元, 则记为 $a \overline{\in} A$. 设 $p(x)$ 是某一与 x 有关的条件, 所有符合这个条件的事物 x 所组成之集, 用 $\{x : p(x)\}$ 或 $E[x : p(x)]$ 来表示. 不含任何元的集称为空集, 用 $\varnothing$ 来表示. 若集 A 的一切元都是集 B 的元, 则称 A 是 B 的子集, 或称 A 包含于B, 也叫作 B 包含 A, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 而又 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

设 A, B 是两个集, 由集 A 同集 B 的一切元所成之集称为 A 与 B 的并 (或并集), 记作 $A \cup B$. 所有既属于 A 又属于 B 的元组成之集称为 A 与 B 的交 (或交集), 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 不相交.

自然, 并与交的定义可以推广到一般的情形:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 有 } \alpha \in I, \text{ 使 } x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 对一切 } \alpha \in I, \text{ 有 } x \in A_\alpha\},$$

其中 α 是集的指标, 它在某个固定的指标集 I 中变化.

由集 A 中不属于 B 的那些元的全体所组成之集称为 A 与 B 的差, 记作 $A\backslash B$, 即

$$A\backslash B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\overline{\in}B\}.$$

若 $S\supset B$, 则称差 $S\backslash B$ 为 B 关于 S 的余集. 若包含集 S 已经清楚地指明或由上下文能够理解时, 就简称 $S\backslash B$ 为 B 的余集, 记作 B^c.

设 A 与 B 都是非空集, 一切可能的有序偶 (a,b) (其中 $a\in A, b\in B$) 所成之集称为 A 与 B 的直积或 Cartesian 积, 记为 $A\times B$. 类似于两个集的直积, 可以定义任意多个集的直积.

设 A 与 B 都是非空集. 若按照一定的法则 f, 对于 A 中的每个元 x, 都存在 B 中的一个确定的元 y 与 x 相对应, 则称 f 为定义在 A 上取值于 B 中的一个函数或映射, 记作 $y=f(x)$. y 称为 x 在映射 f 下的像, 对于固定的 y, A 中适合关系式 $y=f(x)$ 的 x 的全体称为 y 的原像. 集 A 称为映射 f 的定义域, 记作 $D(f)$. $f(A)=\{f(x): x\in A\}$ 称为映射 f 的值域, 记作 $R(f)$. 若 A 是空集 $\varnothing$, 我们就规定 $f(A)=\varnothing$.

设有映射 $f: A\to B$. 若 $f(A)=B$, 即对于 B 中的每个元 y, 都存在 A 中的元 x, 使 $f(x)=y$, 则称 f 是一个满射; 若对于 $f(A)$ 中的每个元 y, 都存在 A 中唯一的元 x, 使 $f(x)=y$, 或者等价地对于 A 中的任意两个不同元 x_1 与 x_2, 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 是一个内射或一一映射; 若 f 既是满射, 又是内射, 也就是说, 对于 B 中的每个元 y, 都存在 A 中的唯一的元 x, 使 $f(x)=y$, 则称 f 是一个双射.

设映射 $f: A\to B$ 是一一的, 则对于 $f(A)$ 中的每个元 y, 都存在 A 中的唯一的元 x 与之相对应, 这样我们便得到一个定义在 $f(A)$ 上取值于 A 中的映射, 称它为 f 的逆映射, 记作 $f^{-1}: f(A)\to A$.

设有映射 $f: A\to B$, 且 $B_0\subset B$, 则称 A 中的那些像在 B_0 中的元的全体为 B_0 在映射 f 下的原像, 记作

$$f^{-1}(B_0)=\{x: x\in A, \text{ 且 } f(x)\in B_0\}.$$

设 A, B 是两个集, 若存在一个从 A 到 B 的双射 f, 则称 A 与 B 是一一对应的, 或者说, A 与 B 是 对等的. 我们把互相对等的集归于同一类, 不对等的集不属于同一类, 对这样的每类集予以一个记号, 称这个记号为这一类集中每个集的势. 集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$. 于是, 相互对等的集 A, B, 就具有相同的势, 即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

若集 A 与 B 不对等, 但集 B 对等于集 A 的某个子集, 则称 A 的势大于 B 的势, 或 B 的势小于 A 的势, 记为 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$, 或 $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$.

凡与自然数集对等的集称为可数集, 此时, 记 $\overline{\overline{A}}=\aleph_0$. 易见, A 为可数集的充要条件是 A 中的元可以排成无穷序列的形式:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

任何区间中的一切有理数所成之集是可数的; 任何区间中的一切代数数所成之集也是可数的.

若 A 为有限集或可数集, 则称 A 为至多可数集.

若集 A 的势大于可数集的势, 则称它为不可数集. 例如, 区间 $[0,1]$ 为不可数集. 若集 A 对等于区间 $[0,1]$, 则称集 A. 具有连续统的势, 此时记 $\overline{\overline{A}}=\aleph$. 任何区间中的一切无理数所成之集都具有连续统的势.

现在介绍关于一维欧氏空间 R^1 中的序列和子集的一些基本概念和性质.

实数序列 $\{x_n\}$ 叫作收敛的, 如果存在实数 x, 使对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 就有

$$|x_n-x|<\varepsilon.$$

这时称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 而称 x 为 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x \quad 或 \quad x_n\to x\ (n\to\infty).$$

若 $\{x_n\}$ 不是收敛的, 则说它是发散的.

设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列, 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使当 $n>N, m>N$ 时, 有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

则称 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛准则 序列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 序列.

给定序列 $\{x_n\}$, 考虑满足 $n_1<n_2<\cdots$ 的正整数序列 $\{n_k\}$, 序列 $\{x_{n_k}\}$ 叫作 $\{x_n\}$ 的子列.

Bolzano-Weierstrass 定理 有界无穷序列必有收敛子列.

设 A 是一个实数集, 若存在一个实数 M, 使得对于 A 中的任何数 x, 都有 $x\leqslant M$, 则称 M 是 A 的一个上界. 类似地, 可以定义实数集 A 的下界. 若 A 既有上界, 又有下界, 则称 A 是有界的.

设 A 是一个实数集, M 是 A 的一个上 (下) 界, 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 必存在 A 中的数 x_ε, 使得 $x_\varepsilon>M-\varepsilon$ $(x_\varepsilon<M+\varepsilon)$, 则称 M 为实数集 A 的上 (下) 确界. 我们用 $\sup A$ 表示 A 的上确界, 用 $\inf A$ 表示 A 的下确界.

有上 (下) 界的实数集必有上 (下) 确界.

设 $a\in R^1$, 称含有 a 的任一开区间为 a 的一个开邻域 (简称邻域). 设 $E\subset R^1$, $a\in E$, 如果存在 a 的某个邻域 (α,β), 使得 $(\alpha,\beta)\subset E$, 则称 a 为 E 的内点. E 的一切内点所成之集叫作 E 的内域, 记为 E°. 若 $E=E^\circ$, 则称 E 为 R^1 中的开集.

设 $E\subset R^1$, $a\in R^1$. 若 a 的任一邻域均含有 E 中除 a 以外的一点, 则称 a 为 E 的聚点或极限点. 显然, 若 a 是 E 的聚点, 则含 a 的任何邻域均含有 E 的无

穷多个异于 a 的点. 其次, 还容易证明, a 为 E 的聚点的充要条件是, E 中有点列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq a, n = 1, 2, \cdots)$ 收敛于 a.

集 E 的一切聚点所成之集称为 E 的导集, 记成 E'. 称 $E \bigcup E'$ 为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$. 集 E 的导集 E' 的一切聚点所成之集, 称为 E 的二阶导集, 并记为 E''. 高阶导集可以类似地定义. 若点 a 的任何邻域内既有属于集 E 的点, 又有不属于集 E 的点, 则称 a 为集 E 的边界点. $E \setminus E'$ 中的点称为 E 的孤立点. 若 $E' \subset E$, 则称 E 为闭集. 若 $E = E'$, 则称 E 为完备集.

可以证明, 非空完备集具有连续统的势.

若集 E 的闭包包含集 A, 则称 E 在 A 中稠密. 特别, 若集 E 在空间 R^1 中稠密, 则称它在 R^1 中处处稠密. 若集 E 的闭包不包含任何非空开集, 则称 E 在 R^1 中无处稠密, 或称 E 为疏集. 一个集叫作第一纲的集, 如果它可以表成可数个疏集的并集; 不是第一纲的集, 就称它为第二纲的集.

直线上的任何非空开集 G 可以表成 (并且是唯一的方法) 有限个或可数个两两不相交的开区间的并集. 这些开区间称为 G 的构成区间. 直线上的任何非空闭集 F 是由整个数轴去掉有限个或可数个两两不相交的开区间而得到, 这些开区间称为 F 的邻接区间. 若闭集 F 是有界的, 并令 $\inf F = a$, $\sup F = b$, 则所说的邻接区间通常是指仅在闭区间 $[a, b]$ 内的那些区间.

可表成可数个开集之交的任意集称为 G_δ 型集; 可表成可数个闭集之并的任意集称为 F_σ 型集.

所谓集 E 的一个开覆盖, 是指这样一组开集 $\{G_\alpha\}$, 这组开集的并集包含 E. 这时, 又称 $\{G_\alpha\}$ 覆盖 E. 集 E 叫作紧的, 是指 E 的每个开覆盖都包含覆盖 E 的有限多个开集 (这有限多个开集叫作 E 的有限子覆盖). 在 R^1 内, 一个集是紧集当且仅当它既是闭的, 又是有界的.

本章以及后面几章的某些例子, 还要用到 p 进位小数的一些性质.

1. 集 A 与 B, 使 $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$.

取 $A = [0, 1], B = [1, 2]$, 则 $A^\circ = (0, 1), B^\circ = (1, 2)$, 从而

$$A^\circ \cup B^\circ = (0, 2) \setminus \{1\}.$$

但 $(A \cup B)^\circ = (0, 2)$, 因此 $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$.

注 容易证明, 对于任意二集 A 与 B, 有

$$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ, \quad A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ.$$

上述反例说明了后一包含关系一般不能代以等号.

2. 集 A 与 B, 使 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

取 $A = [0, 1]$, $B = \{1/2\} \cup (1, 2]$, 则 $\overline{A} = [0, 1], \overline{B} = \{1/2\} \cup [1, 2]$, 所以

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1/2, 1\}, \quad \overline{A \cap B} = \{1/2\},$$

因此, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

注 容易证明, 对于任意二集 A 与 B, 有

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

上述反例说明了后一包含关系一般不能代以等号.

3. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^{\circ} \neq (\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^{\circ}$.

设 $A_n = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}), n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\circ} = \{1\}, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\circ}\right)^{\circ} = \{1\}^{\circ} = \varnothing,$$

故

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\circ} \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\circ}.$$

注 容易证明, 对于任意有限多个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 而言, 恒有

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\circ} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ}.$$

上述反例说明了不能把这个等式推广到无穷多个集合的情形.

4. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \cup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$.

设 R^1 内全体有理数为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 再设 A_n 是由有理数 r_n 所组成的单元素集. 于是

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = (-\infty, +\infty), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}.$$

因此

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

注 容易证明, 对任意有限多个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 而言, 恒有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

上述反例说明了不能把这个等式推广到无穷多个集合的情形.

5. 集 A 与 B, 使 $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

设

$$A = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2k-1}, \cdots\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2k}, \cdots\right\},$$

则 $(A \cap B)' = \varnothing, A' \cap B' = \{0\}$. 因此, $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

注 容易证明, 对任意二集 A 与 B, 有

$$(A \cup B)' = A' \cup B', \quad (A \cap B)' \subset A' \cap B'.$$

上述反例说明了后一包含关系一般不能代以等号.

6. 集序列 $\{A_n\}$, 使 $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)' \neq \cup_{n=1}^{\infty} A_n'$.

设 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ 为有理数全体, A_n 为单元素 r_n 所组成之集, 则对每一 n, $A_n' = \varnothing$, 故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' = \varnothing.$$

而 $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)' = (-\infty, +\infty)$, 因此

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)' \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'.$$

注 容易证明, 对于任意有限多个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 恒有

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k'.$$

上述反例说明了不能把这个等式推广到无穷多个集合的情形.

7. 使 $(\overline{F^\circ}) \neq F$ 的闭集 F.

设 F 是 R^1 中的有限集, 则 F 具有所需的性质.

注 对于任何闭集 F, 显然有

$$\overline{(F^\circ)} \subset F.$$

上述反例说明了这个包含关系一般不能代以等号.

8. 使 $(\overline{G})^\circ \neq G$ 的开集 G.

设 C 为 Cantor 三分集 (参看本章的例 31), 则 $G = [0,1] \setminus C$ 为一开集. 由于 G 在 $[0,1]$ 中稠密, 所以 $\overline{G} = [0,1], (\overline{G})^\circ = (0,1)$. 因此, $(\overline{G})^\circ \neq G$.

注 对于任何开集 G, 显然有

$$G \subset (\overline{G})^\circ.$$

上述反例说明了这个包含关系一般不能代以等号.

9. 集 A, B 与映射 f, 使得 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

设集 X 至少含有两个元, 而 f 是把 X 中的每个元映成 Y 中的某个固定元 a 的一个映射. 取 $A \subset X, B \subset X$, 使 $A \cap B = \varnothing$, 则

$$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing, \quad f(A) \cap f(B) = \{a\}.$$

因此, $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

注 容易证明, 对于任意映射 $f: X \to Y$, 恒有

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

其中集 A 与 B 均含于 X. 上述反例说明了这个包含关系一般不能代以等号.

10. 集 A, B 与映射 f, 使 $B \subset A$ 而 $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$.

设 A, B 均是集 X 的非空子集, $B \subset A$ 且 $B \neq A$, f 是把 X 中的每个元映成 Y 中的某个固定元 a 的一个映射, 则

$$f(A \setminus B) = \{a\}, \quad f(A) \setminus f(B) = \varnothing,$$

因此, $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$.

注 容易证明, 对于任意映射 $f: X \to Y$, 恒有

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

其中 A, B 均为 X 的子集. 上述反例说明了这个包含关系一般不能代以等号.

11. $f(A) \subset f(B)$ 不蕴涵 $A \subset B$ 的映射 f.

设 A, B 是集 X 的非空子集, 使 A 不包含于 B 中, f 是把 X 中的每个元映成 Y 中的某个固定元 a 的一个映射, 则

$$f(A) = f(B) = \{a\}.$$

但 $A \subset B$ 并不成立.

注 容易证明, 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$. 上述反例说明了这个蕴涵关系倒过来是不正确的.

12. 不闭的 F_σ 型集.

取 $F_n = [1/n, 1]$, $n = 1, 2, \cdots$, 则每个 F_n 都是闭集, 而其并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$$

是一个不闭的 F_σ 型集.

13. 不开的 G_δ 型集.

诸开集 $G_n = (-1/n, 1/n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的交集 $\cap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ 为一 G_δ 型集, 而它不是开集.

注 闭集必为 F_σ 型集; 开集必为 G_δ 型集. 例 12 与 13 说明了这些陈述反过来是不正确的. 又容易证明有限多个闭集之并仍是闭集; 有限多个开集之交仍是开集. 例 12 与 13 还说明了对于无穷多个集合而言, 这些陈述不再成立.

14. 一个不可数的实数集, 它的每个闭子集都是可数的.

构造这个例子需要用到序数理论. 细节说明已在 [89] 中译本 pp.189—190 给出.

15. 直线上的仅由边界点所组成的不可数集.

直线上的全体无理数所组成之集具有所需的性质.

16. 直线上的一个离散子集, 它的闭包是一个不可数集.

集 $A \subset R^1$ 叫作离散的 (discrete), 如果对每一 $a \in A$, 存在开区间 $I \subset R^1$, 使

$I \cap A = \{a\}$.

直线上具有不可数闭包的离散集的第一个例子是由 Bendixon 作出的[40]. 他的例子如下.

设 C 为完备疏集, 在 C 的每个邻接区间中选一个递减的且收敛于这个邻接区间的左端点的序列, 以及选一个递增的且收敛于这个邻接区间的右端点的序列, 所有这种序列中的点的全体是 R^1 中的一个离散子集. 由于它的闭包包含了完备集 C, 因而它是一个不可数集.

17. 一个正实数无穷集 E, 对于它, 不存在 $\alpha > 0$, 使 $E \cap (\alpha, +\infty)$ 是无穷集.

设 $E = \{1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\}$, 则对任意 $\alpha > 0$, $E \cap (\alpha, +\infty)$ 恒为有限集.

注 若 E 是正实数的不可数子集, 则必存在 $\alpha > 0$, 使 $E \cap (\alpha, +\infty)$ 也是不可数集.

事实上, 令 $E_n = E \cap (1/n, +\infty)$, 则

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{E \cap (1/n, +\infty)\} = E \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, +\infty)\right\} \\ &= E \cap (0, +\infty) = E.\end{aligned}$$

假若各个 E_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是至多可数集, 那么 $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也将是至多可数的, 于是导致矛盾. 因此, 诸 E_n 中至少有一个是不可数的.

18. 一个集, 它的直到 $n-1$ 阶导集非空, 而 n 阶导集是空集.

当 $n = 2$ 时, 直线上的点集

$$E_1 = \{0, 1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$$

满足这个条件, 此时 $E_1' = \{0\}$, $E_1'' = \varnothing$.

当 $n = 3$ 时, 我们可以作出相应的集 E_2. 例如, 对每个形如 $\frac{1}{i}$ 的数 (i 是自然数), 作序列 $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{i}\}_{k=1}^{\infty}$, 该序列收敛于 $\frac{1}{i}$. 于是, 一切形如 $\frac{1}{k} + \frac{1}{i}$ $(k \geqslant 1, i \geqslant 1)$ 的点再加上数 0 所组成之集就是所求的集 E_2. 事实上, 集 E_1 是集 E_2 的导集: $E_2' = E_1$, 因此 $E_2'' = E_1' = \{0\}$, $E_2''' = \varnothing$.

当 $n > 3$ 时可类似地作出集 E_{n-1}. 一般地, 对任意 $n > 2$, 由一切形如 $\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \cdots + \frac{1}{i_k}$ 的点和数 0 所组成之集 E_{n-1} 满足要求的条件, 其中 $1 \leqslant k < n$, 而分母 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 各自走遍自然数集. 事实上, 容易看出 $E_{n-1}' = E_{n-2}$, 由此按归纳法得到 $E_{n-1}^{(n-1)} = \{0\}$, $E_{n-1}^{(n)} = \varnothing$.

19. 集 E, 它的各阶导集 $E', E'', \cdots, E^{(n)}, \cdots$ 两两相异, 且 $\cap_{n=1}^{\infty} E^{(n)} = \varnothing$.

在闭区间 $[0, 1]$ 中作集 E_1, 它是由一切形如

$$\frac{1}{n_1}, \quad n_1 = 1, 2, \cdots$$

的点组成. 在 $[1,2]$ 中作集 E_2, 它是由一切形如

$$1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

$(n_1=2,3,\cdots,n_2=2,3,\cdots)$ 的点组成. 一般, 在 $[k-1,k]$ 中作集 E_k, 它是由一切形如

$$k-1+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$$

$(n_1=k,k+1,\cdots,n_2=k,k+1,\cdots,n_k=k,k+1,\cdots)$ 的点组成. 令

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,$$

则 $E',E'',\cdots,E^{(n)},\cdots$ 两两相异, 且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E^{(n)}=\varnothing.$$

20. 集 A, 它的各阶导集 $A',A'',\cdots,A^{(n)},\cdots$ 两两相异, 且 $\cap_{n=1}^{\infty}A^{(n)}\neq\varnothing$.

设 E 是例 19 中作出的集, 令 $A=E\cup[-1,0]$, 则 $A^{(n)}\neq A^{(m)}$ $(n\neq m)$, 且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A^{(n)}=[-1,0]\neq\varnothing.$$

21. 集 S 和开集 $G_k, k=1,2,\cdots$, 使 G_k 在 S 中稠密, 而 $\cap_{k=1}^{\infty}G_k$ 在 S 中不稠密.

设 S 是数直线上的全体有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$ 所成之集, G_k 为单元素集 $\{r_k\}$ 的余集: $G_k=(-\infty,+\infty)\setminus\{r_k\}$. 于是, 各个 G_k 皆为开集, 且都在 S 中稠密, 而所有诸集 G_k 之交 $\cap_{k=1}^{\infty}G_k$ 与 S 并无公共点, 因而不能在 S 中稠密.

注 可以证明, 若有限个开集皆在 S 中稠密, 则其交集在 S 中也稠密 (参看 [53], 中译本 p.49). 上述反例说明了不能把这一命题推广到无穷多个开集的情形.

22. 直线上的两个不相交的处处稠密的不可数集.

设 A 是由全部负无理数和全部正有理数所组成之集, B 是 A 的余集, 则 A 与 B 为两个不相交的不可数集, 且在直线上处处稠密.

23. 直线上的一列两两不相交的处处稠密的可数集.

将全体素数编号:

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ p_4=7,\cdots,$$

并记一切形如 $r+\sqrt{p_n}$ 的数组成之集为 E_n, 这里, r 走遍所有的有理数, 而 p_n 是固定的素数. 于是, E_n 是由全体有理数经过平移 $\sqrt{p_n}$ 而得到的, 所以它是数直线上的处处稠密的可数集.

现证各个 E_n 两两不相交. 为此, 设 $m\neq n$, 则 $p_m\neq p_n$. 我们分别从集 E_m 和 E_n 中任取一元 $\xi=r_1+\sqrt{p_m}$ 和 $\eta=r_2+\sqrt{p_n}$, 并证明 $\xi\neq\eta$. 事实上, 假若 $\xi=\eta$,

即 $r_1+\sqrt{p_m}=r_2+\sqrt{p_n}$, 由此得到

$$(r_1-r_2)^2=(\sqrt{p_n}-\sqrt{p_m})^2,\quad \sqrt{p_mp_n}=\frac{p_n+p_m-(r_1-r_2)^2}{2}.$$

于是, 我们得到了一个明显的不正确的结果: 两个不同素数的乘积的平方根是一个有理数. 因此, 当 $m\neq n$ 时, $E_m\cap E_n=\varnothing$.

24. 直线上的一列两两不相交的处处稠密的不可数集.

先在直线上作出一列两两不相交的处处稠密的可数集 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ (参看例 23). 令

$$E=(-\infty,+\infty)\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则 E 为一不可数集. 再令

$$A_1=E_1\cup[E\cap(0,1)],\quad A_2=E_2\cup[E\cap(1,2)],\quad\cdots,$$
$$A_n=E_n\cup[E\cap(n-1,n)],\quad\cdots.$$

易见, 各个 A_n 两两不相交, 且每一个在直线上处处稠密, 同时, 每一个 A_n 都是不可数的.

25. 直线上的一个处处稠密的渐缩集序列 $\{E_n\}$, 满足 $\cap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$.

集序列 $\{E_n\}$ 叫作渐缩的, 如果

$$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots.$$

$\{E_n\}$ 叫作渐张的, 如果

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots.$$

直线上的处处稠密的渐缩集序列, 其交未必非空. 例如, 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 是全体有理数, 令

$$E_1=\{r_1,r_2,\cdots\},\quad E_2=\{r_2,r_3\cdots\},\quad\cdots,\quad E_n=\{r_n,r_{n+1},\cdots\},\quad\cdots,$$

则各个 E_n 在直线上都是处处稠密的, 且 $\{E_n\}$ 是渐缩的集序列. 任取一点 r_k, 因为它不可能属于所有的 E_n, 所以 $\cap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$.

26. 一个渐缩的非空有界开集序列, 其交是空集.

取 $A_1=(0,1),A_2=(0,1/2),\cdots,A_n=(0,1/n),\cdots$, 则各个 A_n 均为非空的有界开集, 且 $A_n\supset A_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 但 $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$.

27. 一个渐缩的无界闭集序列, 其交是空集.

设 $A_n=[n,+\infty)$, 则 $A_n\supset A_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 且所有的 A_n 都是闭集. 然而, 它们的交集是空集.

注 可以证明, 渐缩的非空有界闭集序列, 其交必定非空 (参看 [39]). 例 26 说明了不能把这个命题转移到开集序列的情形. 例 27 则说明了命题中的有界性的条件不可去掉.

28. 一个紧集, 它的导集是可数集.

设 A 是由 0, 1 以及形如 $\frac{1}{2^k}\cdot\frac{n}{n+1}$ 的数所组成之集, 其中 $n=1,2\cdots;k=0,1,2,\cdots$. 当 $k=0$ 时, 序列 $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点是 1. 当 $k=1$ 时, 序列 $\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点是 $\frac{1}{2}$, 这是前一个序列 $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的第一项, 所以 $\frac{1}{2}\in A$. 当 $k=2$ 时, 序列 $\{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点是 $\frac{1}{4}$, 这又是序列 $\{\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的第一项, 所以 $\frac{1}{4}\in A$. 一般, $\{\frac{1}{2^k}\cdot\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的聚点是 $\frac{1}{2^k}$, 它是序列 $\{\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 的第一项, 所以 $\frac{1}{2^k}\in A$. 由此可见, 集 A 的导集是

$$A'=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^k},\cdots,0\right\},$$

它是一个可数集.

由于 $A'\subset A$, 因而 A 是有界闭集, 据 Bolzano-Weierstrass 定理, A 是紧集.

29. 两个完备集, 其交不是完备集.

$E_1=[0,1]$ 与 $E_2=[1,2]$ 均为完备集, 但其交集 $E_1\cap E_2=\{1\}$, 因而并不完备.

30. 可数个完备集, 其并不是完备集.

集 $[1,1\frac{1}{2}],[1\frac{1}{2},1\frac{3}{4}],\cdots,[2-\frac{1}{2^{n-1}},2-\frac{1}{2^n}],\cdots$ 均为完备集, 但其并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[2-\frac{1}{2^{n-1}},2-\frac{1}{2^n}\right]=[1,2)$$

不是完备集.

注　容易证明, 有限多个完备集的并集仍是完备集. 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个完备集的并集上去.

31. 完备的疏集.

将闭区间 $[0,1]$ 用分点 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 分成三部分, 而取去中间的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 将每一个留下来的闭区间 $[0,\frac{1}{3}],[\frac{2}{3},1]$, 又各个等分成三部分 (对于第一个闭区间用 $\frac{1}{9},\frac{2}{9}$ 作分点, 对于第二个闭区间用 $\frac{7}{9},\frac{8}{9}$ 当作分点), 而各个取去中间的开区间 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ 与 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. 再将留下来的闭区间等分成三部分而取去其中间的一个开区间. 将此手续逐次继续, 以至无限.

这样, 从区间 [0,1] 中取走了一个开集 G, 它是可数个开区间的并集:

$$G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\bigcup\left[\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\bigcup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\right]\bigcup\cdots.$$

留下来的集 $C=[0,1]\setminus G=[0,1]\cap G^c$ 是两个闭集的交集, 故为一闭集. 因为 C 是由闭区间 $[0,1]$ 中取去可数个彼此没有公共端点 (且与原来的区间 $[0,1]$ 也无公共端点) 的开区间而成, 所以 C 是一个完备集 (参看 [27], 中译本 p. 52).

显然, C 不能包含任何区间, 即 C 为一疏集. 因此, C 是一个完备的疏集.

集 C 是由 Cantor 构造的, 故通常称 C 为 Cantor 集或 Cantor 三分集.

32. 无理数的完备疏集.

设 a, b 均为无理数且 $a < b, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间 $[a, b]$ 中的有理数的全体. 我们将要在闭区间 $[a, b]$ 中构造一个无理数的完备疏集, 步骤如下: 第一步取去一个开区间, 使其中心在 $[a, b]$ 的中点, 端点为无理数, 而且大得足以包含 r_1. 第二步从余下的两个闭区间中各自取去一个以余下的闭区间的中点作中点, 端点为无理数, 还要让第二个有理数 r_2 被取去 (如果第一步取走开区间时, r_2 未被取去的话). 如此继续下去, 以至无限.

这样, 我们从 $[a, b]$ 中取去了一个开集 G, 它是可数个开区间的并集, 而且由于 $[a, b]$ 中的全体有理数都已经被取去, 所以留下来的集 $E = [a, b] \cap G^c$ 是一个无理数的完备疏集.

注 用同样的方法, 可以构造超越数的完备疏集.

33. 一个疏集序列, 其并是稠密集.

设 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 为直线上的全体有理数, 则单元素集 $A_n = \{r_n\}$ 在直线上无处稠密, 但其并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$$

在直线上处处稠密.

注 容易证明, 有限多个疏集的并集仍是疏集. 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个疏集的并集上去.

34. 两个不相交的疏集, 其中任一集的每个点都是另一集的聚点.

设 A 为区间 $[0, 1]$ 中的 Cantor 集, 取 A 的一个子集 B, 它是由构造 A 时从 $[0, 1]$ 中取去的开区间的各个端点组成, 再设 $E = A \backslash B$. 于是 B 和 E 合乎要求.

35. 一个第二纲的集, 它的余集不是第一纲的集.

区间 $[0, 1]$ 不能表成可数个疏集的并集, 因而它是一个第二纲的集. 它的余集 $(-\infty, +\infty) \backslash [0, 1]$ 也不能表成可数个疏集的并集, 因而它也是一个第二纲的集.

注 第一纲的集的余集必是第二纲的集. 上述反例说明了对偶的命题并不成立.

36. 一个有界闭集被诸闭区间覆盖而不能从中取出有限子覆盖.

有界闭集 $[0, 1]$ 被闭区间序列

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \cdots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \cdots$$

和 $[-1, 0]$ 所覆盖, 但不能从这个覆盖中选出有限子覆盖. 实际上, 不能从这个闭区间序列中删去任何一个闭区间而使余下的一切闭区间仍然覆盖 $[0, 1]$.

注 Borel 有限覆盖定理是说: 设 F 是一有界闭集, μ 是一族开邻域, μ 完

全覆盖了 F, 则在 μ 中一定存在有限多个开邻域, 它们完全覆盖了 F (参看 [6], pp.24—25). 上述反例说明了不能把 Borel 覆盖定理中的开邻域代以闭邻域.

37. $[0,1]$ **中的两个不相交的稠密集** A **与** B**, 满足** $[0,1]=A\cup B$**, 且对任何** $\alpha,\beta(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1)$**, 交集** $(\alpha,\beta)\cap A$ **与** $(\alpha,\beta)\cap B$ **都具有连续统的势.**

我们用下面的方法在 $[0,1]$ 中作出完备集序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$: A_1 取作 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集. 为了构造 $A_n\,(n>1)$, 我们把闭区间 $[0,1]$ 分成 n 个等长的闭区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right],$$

且在这些闭区间的每一个内, 用类似于作出 Cantor 三分集的方法作出一个完备疏集, 把这样得到的 n 个完备疏集的并集叫作 A_n.

现令 $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n, B=[0,1]\backslash A$, 则 A 与 B 在区间 $[0,1]$ 中皆稠密, 且 $A\cap B=\varnothing, [0,1]=A\cup B$. 剩下要证明, 对于任意的 $\alpha,\beta\ (0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1)$, 交集 $(\alpha,\beta)\cap A$ 与 $(\alpha,\beta)\cap B$ 都具有连续统的势. 为此, 任取开区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, 只要 n 充分大, 就总会有某个闭区间 $[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$ 包含在 (α,β) 之中. 根据作法, A_n 与闭区间 $[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$ 的交集是非空的完备集, 因而 $A_n\cap[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$ 具有连续统的势. 又因为 $A\supset A_n, (\alpha,\beta)\supset[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$, 所以交集 $(\alpha,\beta)\cap A$ 也一定具有连续统的势.

$(\alpha,\beta)\cap B$ 可以作为在 (α,β) 内稠密的开集 $(\alpha,\beta)\backslash A_1,(\alpha,\beta)\backslash A_2,\cdots$ 的交集而得到, 这些开集的交集具有连续统的势 (参看 [29], 中译本 pp.157—158), 即 $(\alpha,\beta)\cap B$ 具有连续统的势.

38. 任给势小于 $\aleph$ **的实数子集** Q**, 有实数** a**, 使对每一** $x\in Q$, $x+a$ **皆为无理数**

设 Q 为一实数子集, 且 $\overline{\overline{Q}}=\mu<\aleph$, S 表形如 $r-x$ 的数的全体, 其中 r 是有理数而 $x\in Q$. 于是, $\overline{\overline{S}}<\aleph$, 故存在实数 a, 使 $a\overline{\in}S$. 数 $x+a\ (x\in Q)$ 定然是无理数, 因为假若 $x+a$ 是有理数, 令 $x+a=r$, 则将导致 $a=r-x\in S$ 的矛盾.

第二章

函数

0. 引言.

本章所考虑的一切集合, 包括函数的定义域和值域, 都假定是 R^1 的子集, 除非另有明确的声明. 这个假定在全书中除第十三、十四、十五章外都有效.

设 f 是定义在实数集 D 上的实值函数. 若 f 的值域只有一个点, 则称 f 为常值函数; 若对每一 $x \in D$, 都有 $f(x) = x$, 则称 f 为恒等函数.

我们用 $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数, 并称 $[x]$ 为括号函数. 又, 正负号函数的定义和记号为

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

集 E 的特征函数 φ_E 定义为

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E. \end{cases}$$

从 R^1 到 R^1 内的一个函数 f 称为以 T 为周期的函数, 如果对所有的 $x \in R^1$ 都有 $f(x+T) = f(x)$. 称一个函数为周期函数, 如果对于某个非零数 T, 它是以 T 为周期的函数.

设 $f : B \to C, g : A \to C, A \subset B$, 若对每一 $x \in A$, 都有

$$g(x) = f(x),$$

则称函数 g 为函数 f 在 A 上的限制, 而 f 称为 g 到 B 上的扩张, 记作

$$g = f|A.$$

设 f 是定义在实数集 D 上的实值函数, a 是 D 的一个点或是 D 的一个聚点, f 叫作在 a 点局部有界, 如果存在着 a 的一个邻域, 使 f 在其上是有界的; f 叫作在 D 的一个子集 A 上局部有界, 是指 f 在 A 的每个点都是局部有界的. f 叫作在点 $a \in D$ 取得局部极大值, 如果存在 a 的某个邻域 $N(a,\delta)$, 使对任何 $x \in N(a,\delta)\cap D$, 恒有 $f(x) \leqslant f(a)$. 类似地, 可定义 f 在点 $a \in D$ 取得局部极小值. 函数 f 叫作在 D 上递增的, 如果对于任意的 $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 不等式 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 成立. 若对于任意的 $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, $x_1 < x_2$, 不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则称 f 在 D 上为严格递增函数. 类似地可定义递减函数和严格递减函数. 若函数 f 在 D 上为递增或递减函数, 则称它在 D 上是单调函数; 类似地可定义严格单调函数.

设 I 是函数 f 的定义域内的一个区间, 称 f 在 I 上具有介值性质或 Darboux 性质, 如果对于任意 $a,b \in I\,(a < b)$, 以及 $d \in R^1$ 适合 $f(a) < d < f(b)$ 或 $f(a) > d > f(b)$, 存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f(c) = d$.

称函数 f 在区间 I 上满足 $\alpha\,(\alpha > 0)$ 阶 Hölder 条件, 并记作 $f \in H^{\alpha}(I)$, 如果存在常数 M, 使对任意 $x, y \in I$, 恒有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}.$$

特别, 当 $\alpha = 1$ 时, 就称 f 在 I 上满足 Lipschitz 条件.

设 f 是定义在实数集 D 上的实值函数, a 是 D 的一个聚点, 又设 b 是一个定数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使对满足 $0 < |x-a| < \delta$ 的所有 $x \in D$, 都有

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

则称 x 趋于 a 时 $f(x)$ 趋于 b, 记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{或} \quad x \to a \text{ 时 } f(x) \to b.$$

b 叫作 x 趋于 a 时 $f(x)$的极限. 若当 x 保持大于 a (小于 a) 而趋于 a 时, $f(x)$ 趋于 b, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的右极限 (左极限), 并记为

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b \quad \left(\lim_{x\to a-} f(x) = b\right),$$

或记为 $f(a+) = b\,(f(a-) = b)$. 显然, $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在当且仅当 $f(a+) = f(a-) = \lim_{x\to a} f(x)$.

设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的递增函数, $x \in [a,b]$, 数

$$f(x) - f(x-) \quad \text{和} \quad f(x+) - f(x)$$

分别叫作 f 在 x 处的左跃度和右跃度. 数

$$f(x+) - f(x-)$$

叫作 f 在 x 处的跃度 (对端点 a, b, 只考虑单边跃度).

设 f 是定义域为实数集 D 的实值函数, $x \in D$. 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对满足 $|x-y| < \delta$ 的所有 $y \in D$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

则称 f 在点 x 连续. 若 f 在 x 处不连续, 则称 f 在该点间断. 若函数 f 在 D 的子集 A 的各个点都连续, 则称 f 在子集 A 上连续. 如果我们单说 f 连续, 这是指 f 在它的定义域上连续. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对 D 中满足 $|x-y| < \delta$ 的所有 x, y, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 D 上一致连续.

设 a 是函数 f 的定义域 D 的一个聚点, 又设 $f(x)\,(x \in D)$ 在 a 的某个邻域 $N(a,\delta)$ 内有界. f 在点 a 的上极限和下极限分别以 $\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$ 和 $\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$ 来表示, 并分别以下面的函数 ϕ 和 ψ 定义: 对于 $\delta > 0$,

$$\phi(\delta) = \sup\{f(x) : x \in D \cap N(a,\delta)\},$$

$$\psi(\delta) = \inf\{f(x) : x \in D \cap N(a,\delta)\},$$

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \phi(\delta) = \inf\{\phi(\delta) : \delta > 0\},$$

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \psi(\delta) = \sup\{\psi(\delta) : \delta > 0\}.$$

函数 f 在点 $a \in D$ 叫作上半连续的, 如果

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) \leqslant f(a);$$

f 在点 $a \in D$ 叫作下半连续的, 如果

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) \geqslant f(a);$$

f 在点 $a \in D$ 叫作半连续的, 如果 f 在点 a 或是上半连续或是下半连续的.

在本章的某些例子中, 还要用到微分, 无穷级数的收敛和一致收敛, 一致收敛的 Weierstrass 的 M-判别法, 以及几乎处处连续, Baire 函数等概念和命题. 关于这些概念和命题, 可参看 [7], [18] 和 [27].

1. 一个发散序列 $\{a_n\}$, 使 $\{|a_n|\}$ 收敛.

取 $a_n = (-1)^{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 显然, $\{a_n\}$ 发散. 但 $|a_n| = 1, n = 1, 2, \cdots$, 所以 $\{|a_n|\}$ 收敛.

注 容易证明, 若序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a_n, 则 $\{|a_n|\}$ 必收敛于 $|a|$. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

2. 两个非负的发散序列, 其积却收敛于零.

取 $x_n = (1 + (-1)^n)/2, y_n = (1 - (-1)^n)/2, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均为发散序列. 但 $x_n y_n = 0, n = 1, 2, \cdots$, 故序列 $\{x_n y_n\}$ 收敛于零.

3. 两个非负的发散序列, 其和却是一个收敛序列.

取序列

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$$

及序列

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, \cdots,$$

这两个序列都发散, 但其对应项相加所成之序列是

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \cdots,$$

它是一个收敛序列.

4. 算术平均值收敛的发散序列.

设 $\{x_n\}$ 为一序列, 我们称

$$y_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

为 $\{x_n\}$ 的算术平均值. 容易证明, 若序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的算术平均值所成之序列也收敛. 然而这个命题之逆并不成立. 例如, 取 $x_n = (-1)^{n-1}, n = 1, 2, \cdots$, 则序列 $\{x_n\}$ 发散. 但

$$\lim_{n \to \infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n = 0.$$

5. 不是有界变差的收敛序列.

序列 $\{x_n\}$ 叫作有界变差的, 是指存在常数 M, 使

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \leqslant M, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

容易证明, 有界变差序列必为收敛序列. 然而, 反过来是不正确的. 例如, 令

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k},$$

则有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left|(-1)^n \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right]\right| \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \cdots \\ &< \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 按 Cauchy 收敛准则, $\{x_n\}$ 收敛. 但是

$$\begin{aligned} s_n &= |x_1| + |x_2 - x_1| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

因此, $\{x_n\}$ 不是有界变差的序列.

6. 对每个正整数 p, 都有 $\lim_{n \to \infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 的发散序列 $\{a_n\}$.

取 a_n 为调和级数的第 n 部分和:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

这时序列 $\{a_n\}$ 是发散的, 但是对于每个正整数 p, 都有

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

应当注意的是, 极限 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$ 对于 p 不是一致的. 事实上, 可以证明为使 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$ 对于 p 是一致的, 当且仅当 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列 (参看 [119], p.447). 因此, 对于具有性质 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$ 的发散序列 $\{a_n\}$, 极限 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$ 对于 p 就不可能是一致的.

7. 对任意严格递增的正整数序列 $\{\phi_n\}=\{\phi(n)\}$, 能使 $\lim_{n\to\infty}(a_{\phi(n)}-a_n)=0$ 的发散序列 $\{a_n\}$.

应用归纳法原理, 容易证明, 对一切 $n=1,2,\cdots$, 有 $\phi(n)\geqslant n$, 更一般地, 对一切 n 和 $k=1,2,\cdots$, 有 $\phi(n+k)\geqslant n+\phi(k)$. 所以 $\lim_{n\to\infty}\phi(n)=+\infty$. 现分两种情况来讨论:

(i) 若 $\phi(n)-n$ 有界, 也就是说, 对一切 $n=1,2,\cdots$, 有 $\phi(n)-n\leqslant M$, 这时序列 $\{a_n\}$ 可以取为调和级数的部分和的序列, 因此, $\{a_n\}$ 是发散的. 另一方面, 有

$$\begin{aligned}a_{\phi(n)}-a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{\phi(n)}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{\phi(n)}\leqslant\frac{M}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

(ii) 若 $\phi(n)-n$ 无界, 设 k 是能使 $\phi(k)>k$ 的最小正整数, 并令

$$a_n=\begin{cases}1, & n=k,\phi(k),\phi(\phi(k)),\cdots,\\0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

由于 $\{\phi(n)\}$ 严格递增, 所以 $\{a_n\}$ 中存在着一个恒等于 1 的无穷子列; 又因为 $\phi(n)-n$ 无界, 所以 $\{a_n\}$ 中还会有一个恒等于零的无穷子列存在. 因此 $\{a_n\}$ 发散. 另一方面, 对每个 $n=1,2,\cdots$, 按 a_n 的定义, 恒有 $a_{\phi(n)}=a_n$, 所以 $a_{\phi(n)}-a_n\to 0\,(n\to\infty)$.

8. 函数 f, 对于它, 存在函数 g 使 $g\circ f=I$, 而不存在函数 h, 使 $f\circ h=I$.

设

$$g(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant 0,\\u-1, & u>0;\end{cases}\quad u=f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\x+1, & x>0.\end{cases}$$

则 $g[f(x)]=x$, 即 $g\circ f=I$.

另一方面, 不存在函数 h, 使 $f\circ h=I$. 事实上, 如果存在 h 使 $f\circ h=I$, 那么对任意实数 b, 令 $a=h(b)$, 就得到

$$b=f(a).$$

然而, 对于函数 f 而言, 它的值域是由一切 $u\leqslant 0$ 及 $u>1$ 的实数所组成. 于是, 当取 $b\in(0,1]$ 时, 就不存在 a 而有 $b=f(a)$. 因此, 不存在定义在实直线上的函数 h 使 $f\circ h=I$.

注 这个例子也说明了在一般情况下, f 和 g 的复合与 g 和 f 的复合是不同的.

9. 函数 f, 对于它, 存在无穷多个 g 适合 $f\circ g=g\circ f$.

设 $f(u)=u+1$, 则 $f[g(x)]=g(x)+1, g[f(x)]=g(x+1)$. 因此, 我们只要证明存在无穷多个函数 g, 适合等式

$$g(x)+1=g(x+1)$$

即可. 显然, $g(x)=x+C$ 满足上面的等式, 其中 C 为任意实数.

10. 在某点对称连续而不连续的函数.

称函数 f 在 $x_0\in R^1$ 处是对称连续的, 如果

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0.$$

若 f 在每一点 $x\in R^1$ 都是对称连续的, 就说 f 在 R^1上对称连续.

容易证明, 若函数 f 在 x_0 处连续, 则其亦必在该点对称连续. 但逆命题并不成立. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

则当 x_0 为有理数时, 就有

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0,$$

即 f 在任一有理点都是对称连续的, 然而, f 是无处连续的.

注 Fried 证明了 R^1 上的每个对称连续函数必在 R^1 的某个稠密子集上连续. David 进一步指出[62], 对称连续函数必定是几乎处处连续的. 他还构造了 R^1 上的一个对称连续函数 f, 使 f 在 R^1 的某个不可数子集上处处间断.

11. 函数 f, 使 f 在 x_0 的任何邻域内都是无界的, 但当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 并不趋于无穷大.

设 $f(x)=|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}|$, 则对无论多大的正数 M, 总有充分接近于 $x=0$ 的点, 使

$$\left|\frac{\cos\dfrac{1}{x}}{x}\right|>M.$$

例如, 取 $x=1/(n\pi)$, 则 $|\cos(1/x)/x|=n\pi$, 故当 $n>M/\pi$ 时, 就有

$$\left|\frac{\cos\dfrac{1}{x}}{x}\right|>M.$$

即函数 f 在 $x=0$ 的任何邻域内都是无界的.

但, 若 $x_n=1/(n+\frac{1}{2})\pi$, 则当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$, 此时 $\cos\frac{1}{x_n}/x_n\to 0$, 即当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 并不趋于无穷大.

注 无界函数的定义与函数趋于无穷大的定义有些相似. 然而这两个概念有本质上的差别. 若 $x\to x_0$ 时, $f(x)\to\infty$, 则 f 在 x_0 的每个邻域内必定无界. 但是, 这个命题之逆并不成立.

12. 没有最小正周期的非常值周期函数.

容易证明, 若 $r \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的周期, 则 $-r$ 也是 $f(x)$ 的周期, $nr\,(n = 1, 2, \cdots)$ 也是 $f(x)$ 的周期. 由此可见, 周期函数的一切周期组成了一个关于原点成对称的无穷集合; 因此, 对周期函数的周期进行研究时, 只要研究其正周期就够了.

即使对于定义在整个数轴上的周期函数的所有正周期而言, 并不是都有最小的. 例如, 定义在整个数轴上处处不连续的 Dirichelet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

任一有理数 $r > 0$ 均是它的周期. 事实上, 若 x 是无理数, 则 $x + r$ 也是无理数, 故 $f(x + r) = f(x) = 0$; 又若 x 是有理数, 则 $x + r$ 也是有理数, 故仍有 $f(x + r) = f(x) = 1$. 但正有理数集无最小数, 故 Dirichelet 函数无最小正周期.

注 对连续的周期函数来说, 也不一定是有最小正周期的. 例如, 常值函数 $f(x) \equiv C$, 一切正实数 $r > 0$ 均是它的正周期, 由于一切正实数中无最小的, 故常值函数无最小正周期.

颜怀曾 [20] 指出, 任一非常值的连续周期函数 $f(x)$ 必有最小正周期. 郑格于 [13] 进一步指出, 若非常值的周期函数 $f(x)$ 至少有一个连续点, 则 $f(x)$ 必有最小正周期. 因此, 没有最小正周期的非常值周期函数必定是无处连续的.

13. 一个处处不连续的非常值周期函数, 它具有最小正周期.

我们知道, 没有最小正周期的非常值的周期函数必定是处处不连续的 (参看例 12 的注). 然而, 我们也容易作出一个处处不连续的非常值周期函数, 它具有最小正周期. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2n \leqslant x < 2n+1 \text{ 且 } x \text{ 为无理数}, \\ -1, & 2n \leqslant x < 2n+1 \text{ 且 } x \text{ 为有理数}, \\ 2, & 2n+1 \leqslant x < 2(n+1) \text{ 且 } x \text{ 为无理数}, \\ -2, & 2n+1 \leqslant x < 2(n+1) \text{ 且 } x \text{ 为有理数}, \end{cases}$$

这里, n 为整数. 显然, $f(x)$ 的最小正周期是 2, 它是一个处处不连续的函数.

14. 存在一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是可数集.

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} n, & x \text{ 为 } n\,(n \geqslant 1) \text{ 次的既约有理方程的根}, \\ 0, & x \text{ 为超越数}. \end{cases}$$

可以证明对任意有理数 r 有 $f(x + r) = f(x)$.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 次的既约有理方程

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根, 则可构造一 n 次有理方程使 $\alpha_1 + r, \alpha_2 + r, \cdots, \alpha_n + r$ 是它的根, 并且可以

证明这个方程是既约的, 否则设 $\alpha_1 + r$ 是适合 m 次 $(m < n)$ 既约有理方程的根, 则又可构造一 m 次有理方程使 $\alpha_1 + r + (-r)$ 是它的根. 于是 α_1 是 m 次有理方程的根, 则必导致与 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 是既约的假定矛盾①. 于是当 x 是 n 次既约有理方程的根时, 恒有

$$f(x+r) = f(x) = n.$$

然而正有理数 r 没有最小数, 故 $f(x)$ 没有最小正周期.

容易证明含有实根的任一 n 次有理既约方程是存在的, 如 $x^n = c$, c 是一个正有理数但 c 不是有理数的 n 次幂就是一例. 故 $f(x)$ 的值域是一切非负整数, 从而它是一个可数集.

15. 存在一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是不可数集.

将数轴上的点分类. 两点 x 与 y 称为属于同一类, 当且仅当 $x - y$ 是有理数时. 在每一类中任意选定一点作为代表元素. 于是对于每一 x 将具有形式 $x + r$ (r 是有理数) 的点的全体归为一类 $K_{x_0}(x), x_0$ 表示这一类的代表元素, 则可证得 (参看 [27], 中译本 90—92):

(i) 不同的两类 $K_{x_0}(x), K_{y_0}(y)$ 是不相交的.

(ii) 所有代表元素的全体记为集 A, 则 A 是一不可数集.

作函数 $f(x)$: 令 $f(x_\xi) = x_0, x_\xi \in K_{x_0}(x)$. 则对任意有理数 r, 因为 x_ξ 和 $x_\xi + r$ 同在一类, 所以

$$f(x_\xi + r) = f(x_\xi) = x_0.$$

从而任意有理数 r 是 $f(x)$ 的周期, 所以 $f(x)$ 没有最小正周期.

由于 A 是不可数集, 得 $f(x)$ 的值域是不可数集.

例 13 至例 15 都是由郑格于作出的[18].

16. 存在两个具有不同周期的周期函数, 其和仍是一个周期函数.

设 a, b, c 是两两不同的实数, 对实数 x, 令

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x - ma - nb) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x - ma - nc),$$

$$g(x) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x - mb - nc) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x - ma - nb).$$

易见, 函数 f, g 分别具有周期 a, b, 而函数 $f + g$ 具有周期 c.

这个例子是由 Denniston 作出的 [67].

① 这里只要用到根与系数的关系的 Vieta 公式和对称多项式的基本定理.

17*. 存在两个具有最小正周期的函数, 它们之间无可公度的周期, 但其和 (积) 仍为周期函数.[①]

对于两个具有同一周期 t 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 显然, 它们的和、差、积、商均是以 t 为周期的函数. 这个条件等价于函数 $f(x)$ 有一周期 t_1 与 $g(x)$ 的某一周期 t_2 是可公度的, 即 t_1/t_2 为有理数. 我们自然要问: 要使两个周期函数的和、差、积、商仍为周期函数, 是否它们必须有可公度的周期? 这些问题的答案都是否定的. 由于两个周期函数的差和商, 总可以看作两个周期函数的和与积, 故我们只考虑和与积的情形.

第一例 (a) 任取三个正数 t_1, t_2 和 t, 使它们两两无公度. 考虑每个区间 $I_i = [0, t_i)(i = 1, 2)$ 上的任意两点 x 和 x' 间的关系:

$$x - x' = nt + mt_i \quad (n \text{ 和 } m \text{ 均为整数}).$$

我们指出, 由上式所规定的关系是一种等价关系, 即具有:

(i) 自反性. 由 $x - x = 0 \cdot t + 0 \cdot t_i$ 可见;

(ii) 对称性. 由下面关系可见: 若 $x - x' = nt + mt_i$, 则 $x' - x = (-n)t + (-m)t_i$;

(iii) 传递性. 由以下可见: 若 $x' - x = nt + mt_i$, $x'' - x' = n't + m't_i$, 则

$$\begin{aligned} x'' - x &= (x'' - x') + (x' - x) \\ &= (n't + m't_i) + (nt + mt_i) = (n' + n)t + (m' + m)t_i. \end{aligned}$$

将区间 I_i 的点按上述等价关系分类; 每一类记作 I_{ij}, 这里 i 遍历某个指标集 J, 因此

$$I_i = \bigcup_{j \in J} I_{ij} \quad \text{且} \quad I_{ij_1} \cap I_{ij_2} = \varnothing \quad (j_1 \neq j_2).$$

我们指出, 每个类 I_{ij} 中均有 I_i 中的无穷多个不同的点. 事实上, 由选择公理, 我们可以从每个 I_{ij} 中选出一个代表点 x_{ij}° 来. 则同一类 I_{ij} 中的点 x 可表为下列形式:

$$x = x_{ij}^\circ + nt + mt_i \quad (n \text{ 和 } m \text{ 为整数});$$

对于不同的 $n: n_1 \neq n_2$, 则对应的点 $x_1 = x_{ij}^\circ + n_1 t + m_1 t_i$ 和 $x_2 = x_{ij}^\circ + n_2 t + m_2 t_i$ 亦不相同 (即 $x_1 \neq x_2$), 因为, 若 $x_1 - x_2 = (n_1 - n_2)t + (m_1 - m_2)t_i = 0$, 则

$$t/t_i = -(m_1 - m_2)/(n_1 - n_2).$$

这便推出 t 与 t_i 有公度, 与假设不合; 反之, 若 $x_1 \neq x_2$, 则对应的 n_1 和 n_2 亦不相等, 否则必有 $m_1 \neq m_2$, 而 $0 < |x_1 - x_2| = |m_1 - m_2| t_i$, 但 $|x_1 - x_2| < t_i$ 而 $|m_1 - m_2| t_i \geqslant t_i$, 这是不可能的. 由此可知, 每个 I_{ij} 中的点与一切整数成一一对应, 且彼此互不相同.

现在来定义 $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$: 对于每个类 I_{ij} 中的代表点 x_{ij}°, 令

$$f_i(x_{ij}^\circ) = x_{ij}^\circ \quad (j \in J).$$

---

① 以后题号上加星号的, 均表示较深较难的题.

对于 I_{ij} 中任一点 $x = x_{ij}^{\circ} + nt + mt_i$, 令

$$f_i(x) = x_{ij}^{\circ} + na_i,$$

其中 $|a_i| > \max\{t_1, t_2\}$ 且 $a_1 = -a_2$. 由此 $f_i(x)$ 在 I_i 上有了定义. 我们指出, 对于 I_i 中任意两个不同的点 $x \neq x'$, 都有 $f(x) \neq f(x')$. 事实上, 若 x 和 x' 同属于一类 I_{ij}, 则由上面的讨论知道, 它们应对应不同的 n 和 n', 故 $f_i(x) - f_i(x') = (n-n')a_i \neq 0$; 若 x 和 x' 不属于同一类, 则 $f_i(x) - f_i(x') = (x_{ij}^{\circ} + na_i) - (x_{ij'}^{\circ} + n'a_i) = (x_{ij}^{\circ} - x_{ij'}^{\circ}) + (n - n')a_i$, 它若为 0, 则

$$|x_{ij}^{\circ} - x_{ij'}^{\circ}| = |n - n'||a_i| > 0,$$

由此得到 $|x_{ij}^{\circ} - x_{ij'}^{\circ}| \geqslant |a_i|$, 这是不可能的.

对于任意实数 x, 总存在着 I_i 中唯一的 x', 使 $x = x' + nt_i$, 我们定义

$$f_i(x) = f_i(x' + nt_i) = f_i(x').$$

由此定义了以 t_i 为周期的函数 $f_i(x)$. 由函数 $f_i(x)$ 在 I_i 的任意两个不同点上取不同的值, 可知 $f_i(x)$ 无小于 t_i 的周期.

据 $f_i(x)$ 的定义, 可知对于任意的 x,

$$f_i(x + t) - f_i(x) = a_i$$

成立. 由 $a_1 = -a_2$, 便有

$$f_1(x + t) - f_1(x) = f_2(x) - f_2(x + t),$$

即

$$f_1(x + t) + f_2(x + t) = f_1(x) + f_2(x)$$

对于一切 x 成立. 这就表明 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 以 t 为周期, 而 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 无可公度的周期, 因为它们的周期均为 t_1 和 t_2 的整数倍, 而 t_1 与 t_2 是无公度的.

第一例 (b) 取第一例 (a) 中的函数 $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$, 我们令

$$L_i(x) = e^{f_i(x)} \quad (i = 1, 2).$$

由指数函数的单调性可知, $L_i(x)$ 与 $f_i(x)$ 有完全相同的周期, 据指数法则有

$$L(x) = L_1(x)L_2(x) = e^{f_1(x)}e^{f_2(x)} = e^{f_1(x)+f_2(x)} = e^{f(x)}.$$

由 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 为周期函数推知, $L(x) = e^{f(x)}$ 亦为周期函数.

上面的构造法属于李继闵 [10].

第二例 (a) 设

$$E = \left\{ n\sqrt{2} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\},$$

$$A = \left\{ n + \frac{1}{2} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\}, \quad B = \left\{ m + n\sqrt{2} : m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\},$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in R^1 \setminus E, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in R^1 \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

显然, $f(x)$ 是以 $\sqrt{2}$ 为最小正周期的周期函数. 我们证明 $g(x)$ 是以 1 为最小正周期的周期函数. 对 $g(x)$ 的定义域中任一点 $x, x \neq m + n\sqrt{2}$ $(m, n$ 为任意整

数), 有 $x \pm 1 \neq m + n\sqrt{2}$, 因此 $x \pm 1$ 仍是 $g(x)$ 的定义域中的点, 若 $x = n + 1/2$ (n 为整数), 有 $g(x \pm 1) = g(x) = 1$; 若 $x \neq n + 1/2$ (任意整数 n), $x \pm 1 \neq n + 1/2$ (任意整数 n), 所以 $g(x + 1) = g(x) = 0$. 因此, 1 是 $g(x)$ 的周期, 设 r 为小于 1 的正数, 因为 $g\ (1/2) = 1$, 而 $r + 1/2 \in (1/2, 3/2)$, 所以 $g(x)$ 在 $r + 1/2$ 或者无定义或者 $g(r + 1/2) = 0 \neq g(1/2)$, 因此 r 不是 $g(x)$ 的周期, 所以 $g(x)$ 是以 1 为最小正周期的周期函数.

易见, $f(x) + g(x)$ 的定义域正好与 $g(x)$ 的定义域相同, 且对其定义域内的任一 x, 都有 $f(x) + g(x) = g(x)$, 因此, $f(x) + g(x)$ 实质上就是 $g(x)$, 从而 $f(x) + g(x)$ 是周期函数.

最后, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期分别为 $\sqrt{2}$ 与 1, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 没有可公度的周期.

第二例 (b) 取第二例 (a) 中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 令

$$f_1(x) = 10^{f(x)}, \quad g_1(x) = 10^{g(x)},$$

则 $f_1(x)g_1(x)$ 实质上就是 $g_1(x)$, 由 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 的定义, $f_1(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的最小正周期, $g_1(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期, 所以 $f_1(x)g_1(x)$ 为周期函数, 而 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 没有可公度的周期.

上面的构造法属于宣立新[12].

注 第一例 (a) 中的两个函数都是无界的, 它们具有相同的定义域, 由下述宣立新证明的定理可知这并非偶然.

定理 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是具有相同定义域的周期函数, 若对于任意的实数 a, 相应的函数 $h_a(x) = f(x + a) - f(x)$ 或为常值函数或有最小正周期, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个是有界的, 则 $f(x) + g(x)$ 为周期函数的充要条件是它们之间有可公度的周期.

第二例 (a) 中的两个函数都是有界的, 但具有不同的定义域. 又, 容易证明对任意实数 $a, h_a(x) = f(x + a) - f(x)$ 或为常值函数或是具有最小正周期的周期函数. 因此, 第二例 (a) 说明了对于定义域不相同的两个周期函数而言, 上面的定理是不适用的.

18. 存在一个非周期函数 f, 使 $|f|$ 是周期函数.

容易证明, 若 f 是周期函数, 则 $|f|$ 亦为周期函数. 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ |\sin x|, & x < -\pi \text{ 或 } x > 2\pi, \end{cases}$$

则 $|f|$ 是周期函数而 f 不是周期函数.

19. 处处有限而又处处局部无界的函数.

设

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=m/n,\ \text{此处 } m \text{ 和 } n \text{ 是互质的整数}, n>0 \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则 f 在每一点 $x_0 \in R^1$ 都有定义, 且在该点的函数值有限. 然而, f 在点 x_0 并不局部有界. 事实上, 假若存在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta)$, 使得 f 在其上是有界的, 则 $N(x_0,\delta)$ 内全体 m/n 的分母 n 有界, 从而分子 m 也将有界. 但是这只能许可有限多个有理数在邻域 $N(x_0,\delta)$ 内, 这与有理数的全体在 R^1 内稠密的性质发生矛盾. 因此, f 在 $N(x_0,\delta)$ 上不可能是有界的.

20. 一个无处连续函数, 其绝对值却处处连续.

设

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则 f 在 R^1 内无处连续, 而 $|f(x)|\equiv 1$ 在 R^1 内处处连续.

注 容易证明, 若 f 在集 A 上连续, 则 $|f|$ 在 A 上亦必连续. 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

21. 有唯一个连续点的函数.

设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则 f 仅有的连续点是 0.

22. 关于乘积函数连续性的例子.

关于乘积函数的连续性, 我们熟知定理: 若 f 与 g 在 x_0 处皆连续, 则 fg 在 x_0 处亦必连续. 但当 f 与 g 在 x_0 处不同时连续时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 连续, $g(x)=\sin(1/x), x\neq 0; g(0)=0, g$ 在 $x=0$ 处不连续. 由于

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)=0=f(0)g(0),$$

故 fg 在 $x=0$ 连续.

(b) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 连续, $g(x)=1/x, x\neq 0; g(0)=0, g$ 在 $x=0$ 不连续. 其积 fg 在 $x=0$ 不连续.

(c) 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ 1, & x>0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

则 f 与 g 在 $x=0$ 处皆不连续. 然而

$$\lim_{x\to0-} f(x)g(x) = \lim_{x\to0-} x(-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to0+} f(x)g(x) = \lim_{x\to0+} 1\cdot x = 0,$$

所以

$$\lim_{x\to0} f(x)g(x) = 0 = f(0)g(0),$$

即 fg 在 $x=0$ 处连续.

(d) $f(x)=g(x)=1/x$, $x\neq0$; $f(0)=g(0)=0$, 则 f 与 g 在 $x=0$ 处皆不连续, 其积 fg 在 $x=0$ 处亦不连续.

总之, 可列出下表

	f 在 $x=x_0$	g 在 $x=x_0$	fg 在 $x=x_0$	例
1	连续	连续	连续	定理
2	连续	不连续	连续	(a)
3	连续	不连续	不连续	(b)
4	不连续	不连续	连续	(c)
5	不连续	不连续	不连续	(d)

23. 关于复合函数连续性的例子.

关于复合函数的连续性, 我们熟知定理: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 连续, 则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 连续. 但当 $g(y)$ 在 $y=y_0$ 与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不同时连续时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) 设 $f(x)\equiv1$, 而

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为有理数},\\ 0, & y \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $g(y)$ 在 $y=f(0)=1$ 处不连续, 而复合函数 $g[f(x)]\equiv1$ 在 $x=0$ 处连续.

(b) 设 $f(x)=x^2$, 又设

$$g(y)=\begin{cases}y, & y\leqslant1,\\ 3y-5, & y>1,\end{cases}$$

则 f 在 $x=1$ 处连续, $g(y)$ 在 $y=1$ 处不连续. 因为

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant1,\\ 3x^2-5, & |x|>1,\end{cases}$$

故复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=1$ 处不连续.

(c) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 不连续, $g(y)=y(1-y^2)$ 在 $y=0$ 连续. 因为

$$g[f(x)]=(\operatorname{sgn}x)(1-\operatorname{sgn}^2x)\equiv0,$$

故 $g[f(x)]$ 在 $x=0$ 处连续.

(d) 设 $g(y)=y$, 又设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 f 在 $x=0$ 处不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=1$ 处连续, 复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续.

(e) 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ -1, & x \text{ 为无理数},\end{cases}\quad g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为有理数},\\ 0, & y \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=1$ 处也不连续. 但是, 复合函数 $g[f(x)]\equiv 1$ 在 $x=0$ 处连续.

(f) 设 $f(x)=1/x, x\neq 0; f(0)=0, g(y)=\operatorname{sgn} y$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=0$ 处不连续. 复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}\operatorname{sgn}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处也不连续.

总之, 可列出下表

	$f(x)$ 在 $x=x_0$	$g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$	$g[f(x)]$ 在 $x=x_0$	例
1	连续	连续	连续	定理
2	连续	不连续	连续	(a)
3	连续	不连续	不连续	(b)
4	不连续	连续	连续	(c)
5	不连续	连续	不连续	(d)
6	不连续	不连续	连续	(e)
7	不连续	不连续	不连续	(f)

24. 两个正则函数, 构成非正则的复合函数.

定义在区间 I 上的函数 f 叫作正则的, 如果对每一点 $x\in I, f$ 在 x 处有左极限和右极限, 即 $\lim\limits_{\substack{y\in I\\ y\to x-}} f(y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{y\in I\\ y\to x+}} f(y)$ 均存在. 显然, 阶梯函数是正则的.

函数 $f(x)=x\sin(1/x)(f(0)=0)$ 是连续的, 故它在区间 $I=[0,1]$ 上是正则的. 又函数 $g(y)=\operatorname{sgn} y$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上也是正则的. 然而复合函数 $g\circ f$ 在 I 上并不正则.

25. $[0,1]$ **的一个闭子集** X_0 **及** X_0 **到** X_0 **上的两个可换连续映射** f, g, **不存在** f, g **的可换连续扩张.**

De Marr 曾提出下列问题 [64]：设 X 是拓扑空间, 具有性质: 从 X 的闭子集 X_0 到 X_0 的每个连续映射可扩张到 X 上的连续映射. 此外, 设 f, g 是 X_0 到 X_0 上的两个可换连续映射, 即对任何 $x \in X_0$, 都有 $f[g(x)] = g[f(x)]$. 问: 是否存在 f, g 的连续扩张 F, G, 使 F, G 仍是可换映射?

Anderson 和 Kay 指出 [37], 即使 $X = [0,1]$, 这个问题的答案也是否定的. 他们的例子如下: 设

$$f(x) = g(x) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/3,$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x/2 - 1/3 \\ g(x) &= -x/2 + 2/3 \end{aligned}\right\}, \quad 2/3 \leqslant x \leqslant 1,$$

$X_0 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, 则 f 与 g 是 X_0 到 X_0 上的两个可换的连续映射. 假如 F, G 分别是 f, g 在 $X = [0,1]$ 上的连续扩张, 并令

$$x_0 = \inf\{x : F(x) = 2/3\},$$

$$x_1 = \inf\{x : G(x) = 2/3\},$$

那么, 由于 F 与 G 都连续, 因而 $F(x_0) = G(x_1) = 2/3$, 而且当 $x_0 \leqslant x_1$ 时 $G(x_0) \geqslant 2/3$, 等号仅当 $x_0 = x_1$ 时成立. 因此

$$G[F(x_0)] = G(2/3) = 1/3.$$

而

$$F[G(x_0)] \leqslant 1/6,$$

于是

$$G[F(x_0)] \neq F[G(x_0)].$$

同理可证, 当 $x_1 < x_0$ 时, $F[G(x_1)] = 0, G[F(x_1)] \geqslant 1/6$. 由此可见, f, g 不可能有可换的连续扩张.

26. **函数** $y = f(u), u = g(x)$ **适合** $\lim_{u\to A} f(u) = B, \lim_{x\to a} g(x) = A$, **但** $\lim_{x\to a} f[g(x)]$ **不存在.**

设

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q, p, q \text{ 是互质的整数, 且 } q > 0, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

显然, $\lim_{u\to 0} f(u) = 1$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. 但是, 若取 x 为无理数, 则 $g(x) = 0$, 从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)] = 0.$$

若取 x 为有理数, $x=p/q$, 则 $g(x)=1/q$, 从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)]=1.$$

可见, $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 不存在.

注 我们有如下的命题 (参看 [7], p.103): 如果函数 f 与 g 满足下列两条件之一, (i) $f(u)$ 在 u_0 连续, $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$, (ii) $\lim_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 但在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta,x_0),(x_0,x_0+\delta)$ 内, $g(x)\neq u_0$, 那么

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

这个定理具有很重要的意义, 我们时常对自变量作代换来求极限, 其实是基于这个定理的. 例如, 求 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 时, 作代换 $u=g(x)$, 而由 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 把求 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 的问题化为求极限 $\lim_{u\to u_0} f(u)$. 上述反例表明这样作代换, 并不是永远通行无阻的, 还必须注意定理的条件. 因此, 在讨论 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 时, 不考虑定理的条件而轻易地作代换 $u=g(x)$, 并从 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ 和 $\lim_{u\to 0} f(u)=1$ 来断定

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)]=\lim_{u\to 0} f(u)=1,$$

那就是错误的.

27. 函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$, 其复合函数 $f[g(x)]$ 处处连续, 并适合 $\lim_{u\to b} f(u)=c$, $\lim_{x\to a} g(x)=b$, $\lim_{x\to a} f[g(x)]\neq c$.

设 $g(x)\equiv 0$, 又设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

则有 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. 然而对于一切 x, $f[g(x)]\equiv 1$, 所以 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]=1$.

注 如果再附加条件: $x\neq a$ 蕴涵 $g(x)\neq b$, 那么这个反例就变成不可能的了.

28. 函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 x_0 均连续, 而 $f(x)=\sup_n f_n(x)$ 在 x_0 间断.

在 R^1 上定义函数 f_n 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ nx, & 0<x\leqslant 1/n,\\ 1, & x>1/n.\end{cases}$$

易见, 函数 $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ 在 R^1 上都连续. 然而上确界函数

$$f(x)=\sup_n f_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 间断.

注 可以证明, 假如定义在点集 M 上的有限多个函数 $f_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 在点 $x_0\in M$ 都连续, 那么它们的最大值函数

$$f(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$$

及最小值函数

$$g(x)=\min_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$$

在点 x_0 也连续 (参看 [8], pp.112—113). 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个函数的情形.

29. 一个无处连续函数, 其反函数却处处连续.

令 $c_1=\frac{1}{2}, c_2=\frac{1}{4}, c_3=\frac{3}{4}, c_4=\frac{1}{8}, c_5=\frac{3}{8}, c_6=\frac{5}{8}, \cdots$, 一般, 分母是 2^n, 分子是小于分母的正奇数. 再令 $a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{1}{4}, a_4=\frac{3}{4}, a_5=\frac{1}{5}, a_6=\frac{4}{5}, \cdots$, 一般是 $\frac{1}{k}$ 及 $\frac{k-1}{k}$. 显然, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一一对应的. 令 $f(c_n)=a_n$, 则 f 在任何点的上极限是 1, 下极限是 0, 故 f 在任何一点均不连续. 但其反函数 $g(a_n)=c_n$ 在每一点都连续.

注 设 $f(a_n)=c_n$, 则 f 在每一点都连续, 而其反函数 $g(c_n)=a_n$ 却无处连续.

30. 有限区间上的一个一对一的连续函数, 其反函数不连续.

考虑函数

$$g(x)=(\cos x, \sin x), \quad 0\leqslant x<2\pi,$$

则 g 是一个从区间 $J=[0,2\pi)$ 映到 R^2 中的单位圆的圆周 c 上的一对一的连续函数, 但这时 g^{-1} 是把圆周 c 映到区间 J 上, 因此它不可能是连续的, 因为要把圆周展开在一个区间上, 就必须"破开"这圆周. 事实上我们看到, g^{-1} 把 $(1,0)$ 这一点映到 $0\in J$ 上, 而把接近 $(1,0)$、但在它以下的 c 上所有的点映到 J 中接近 2π 的点上.

注 如果一对一的连续函数 f 的定义域是紧集, 那么 f^{-1} 必定是连续的 (参看 [119], p.192). 例 30 说明了在这个陈述中, 函数的定义域为紧集的条件是不能去掉的.

31. 不能作为任何连续函数序列的极限的函数.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

可以证明, 不存在 $[0,1]$ 上的连续函数序列 $\{f_n\}$, 使对每一 $x\in[0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

事实上, 假若 f 是某个连续函数序列 $\{f_n\}$ 的极限:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

令

$$F_n^{(k)} = \left\{x : f_n(x) \leqslant 1 - \frac{1}{k},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}, \quad S_m^{(k)} = \bigcap_{n=m}^{\infty} F_n^{(k)},$$

那么, 由于 f_n 都是连续函数, 所以对于任何自然数 n 与 k, $F_n^{(k)}$ 都是闭集 (参看 [8], pp.115—116). 从而 $S_m^{(k)}$ 也是闭集. 再由关系式

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

得到

$$\{x : f(x) < 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^{(k)},$$

因此, $\{x : f(x) < 1\}$ 是一个 F_σ 型的集.

另一方面, $\{x : f(x) < 1\}$ 是 $[0,1]$ 上的一切无理数所组成之集, 因而它不是 F_σ 型的集 (参看 [39], p.26), 由此导致矛盾. 因此, 不存在连续函数序列 $\{f_n\}$, 使对每一 $x \in [0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

32. $[0,1]$ **上的一个函数** f**, 它的连续点所成之集在** $[0,1]$ **中稠密, 但** f **不是某个连续函数序列的极限.**

我们先陈述 Baire 准则如下:

设 f 是定义在完备集 E 上的函数, 则 f 是 E 上某个连续函数序列的极限的必要充分条件是: 对 E 的每个完备子集 P, f 作为限制在 P 上的函数时, 它在 P 上至少有一个连续点 (参看 [25], 中译本 p.221).

由 Baire 准则立即推知, 例 31 中的函数 f 不能作为任何连续函数序列的极限. 现在我们进一步构造一个定义在区间 $[0,1]$ 上的函数, 它的连续点所成之集在 $[0,1]$ 中稠密, 但它仍不是某个连续函数序列的极限.

设 E 是 $[0,1]$ 中的完备疏集, (α_i, β_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是 E 的全体邻接区间, 在 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \alpha_i \text{ 或 } x = \beta_i, i = 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 的稠密子集 $\cup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$ 上是连续的. 然而, f 作为限制在 E 上的函数时, 它在 E 上无处连续. 于是由 Baire 准则可知, f 不能作为连续函数序列的极限.

33. $[0,1]$ **上的一个具有不可数间断点的函数, 它却是某个连续函数序列的极限.**

设 P 为 $[0,1]$ 中的完备疏集, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in P, \\ 0, & x \in [0,1] \backslash P. \end{cases}$$

易见, f 在 P 上无处连续.

兹证 f 是某个连续函数序列的极限. 为此, 我们任取 $[0,1]$ 的完备子集 A. 如果 $A\subset P$, 则在 A 上, $f(x)\equiv 1$, 从而 f 作为限制在 A 上的函数时, 它在 A 上是连续的. 如果 $A\subset P$ 不成立, 则存在 $x_0\in A$ 且 $x_0\overline{\in}P$. 由于 P 是闭集, 因而存在 x_0 的某个邻域 $N(x_0,\delta)$, 使 $N(x_0,\delta)\cap P=\varnothing$. 在 $A\cap N(x_0,\delta)$ 上, $f(x)\equiv 0$, 可见 f 作为限制在 A 上的函数时, 它在 A 上至少有一个连续点. 因此, 由 Baire 准则可知, f 必是某个连续函数序列的极限.

f 是某个连续函数序列的极限也可由下列命题直接得到: 有界闭集的特征函数必是某个连续函数序列的极限 (参看 [27], 中译本 p.491).

注 我们甚至还可进一步构造区间 $[0,1]$ 上的一个函数, 它在任一非空开区间 $I\subset[0,1]$ 上都有不可数的间断点, 但它仍是某个连续函数序列的极限.

设 $P_n\,(n=1,2,\cdots)$ 是 $[0,1]$ 中的一列两两不相交的完备疏集, 并且对于 $[0,1]$ 的任一非空开区间 I, 它都含有这些集合中某些集合的点. 令

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n.$$

显然, E 是 $[0,1]$ 中的一个不可数的稠密集. 在 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}E,\\ 1/n, & x\in P_n, n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

任取非空开区间 $I\subset[0,1]$, f 在 I 上显然有不可数个间断点. 另一方面, 仿照例 33 的证明, f 是某个连续函数序列的极限.

34. 函数序列 $\{f_k^{(n)}\}$, 对于任意固定的 n, 当 $k\to\infty$ 时 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 处处收敛于 $f^{(n)}(x)$, 而当 $n\to\infty$ 时 $\{f^{(n)}(x)\}$ 处处收敛于 $f(x)$, 但 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 的任何子列并不处处收敛于 $f(x)$.

设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的有理数},\\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的无理数},\end{cases}$$

则 f 不可能表示成连续函数序列的极限 (参看例 31). 再设

$$f_k^{(n)}(x)=(\cos n!\pi x)^{2k},$$

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & n!x \text{ 为整数},\\ 0, & n!x \text{ 不为整数},\end{cases}$$

显然, 对于固定的 n, 当 $n!x$ 为整数时,

$$(\cos n!\pi x)^2=1,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}f_k^{(n)}(x)=1.$$

当 $n!x$ 不为整数时,

$$(\cos n!\pi x)^2 = q < 1,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(n)}(x) = 0.$$

即有

$$\lim_{k\to\infty} f_k^{(n)}(x) = f^{(n)}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

又, 对任一 $x_0 \in [0,1]$, 若 x_0 为有理数, $x_0 = q/p$, q, p 为互质的整数且 $p > 0$, 则当 $n \geqslant p$ 时, $n!/p$ 是整数, $n!x_0 = n!q/p$ 亦然, 从而 $f^{(n)}(x_0) = 1$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = 1.$$

若 x_0 为无理数, 则由于对任何正整数 n, $n!x_0$ 不会是整数 (如若不然, 有正整数 n_0 使 $n_0!x_0 = q$, q 是整数, 则 $x_0 = q/n_0!$ 是有理数, 这是矛盾的), 所以对一切 n, 都有 $f^{(n)}(x_0) = 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = 0.$$

综上所述, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f(x).$$

但对任意固定的 n, k, $f_k^{(n)}(x) = (\cos n!\pi x)^{2k}$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 所以 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 的任何子列 $\{f_{k_j}^{(n_i)}(x)\}$ 都不会收敛到函数 $f(x)$(参看例 31).

35. 仅在有理点间断的严格递增的函数.

设 $r_1, r_2, \cdots, r_k \cdots$ 为数轴上的全部有理点, 命

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k},$$

这里, 按一切使 $r_k < x$ 的那些足码 k 求和. 因为所给的级数总是收敛的, 所以这个函数对一切实数 x 都有意义. 又因为对任意两个实数 x_1, x_2, $x_1 < x_2$, 总存在有理数 r_{k_0}, 使得 $x_1 < r_{k_0} < x_2$, 所以

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + \frac{1}{2^{k_0}} > f(x_1).$$

因此, 函数 f 在 R^1 上是严格递增的.

我们先来证明, 这个函数在每个有理点 r 都是间断的. 事实上, 对任一 $x > r$, 有

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k} = \sum_{r_k < r} \frac{1}{2^k} + \sum_{r \leqslant r_k < x} \frac{1}{2^k}.$$

假定有理点 r 的足码为 n, 那么

$$\sum_{r \leqslant r_k < x} \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^n}.$$

因此

$$f(x) > \sum_{r_k<r} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = f(r) + \frac{1}{2^n}.$$

在这个不等式中, 令 $x \to r+$ (即 x 保持大于 r 而趋向于 r) 而取极限, 就得到

$$f(r+) \geqslant f(r) + \frac{1}{2^n}.$$

由此可见, 函数 f 在每个有理点 r_n 都是右间断的, 而且它的右方跃度 $f(r_n+) - f(r_n) \geqslant \frac{1}{2^n}$, 因而 f 在点 r_n 处间断.

我们再来证明, 函数 f 在其他点都是连续的, 且在有理点 r_n 处的跃度等于 $\frac{1}{2^n}$. 这个结论可以从下面的考虑得出: 对于单调函数而言, 它的上界和下界之差大于或等于一切跃度之和, 而

$$\sup_k f(x) = \sum_k \frac{1}{2^k} = 1, \quad \inf_k f(x) = 0,$$

所以一切跃度之和 S 满足不等式

$$S \leqslant 1.$$

另一方面, 一切跃度之和大于或等于诸点 r_n 处的右方跃度之和, 所以

$$S \geqslant \sum_n \frac{1}{2^n} = 1.$$

因而在诸点 r_n 处的右方跃度之和等于函数的全部可能跃度. 由此可知, 函数 f 在其他各点均连续, 且在点 r_n 处的跃度恰好等于 $\frac{1}{2^n}$.

由例 35 的构造法可知, 对于任意给定的 R^1 中的可数集 A, 都可以作出 R^1 上的一个严格递增函数 f, 使 f 在 A 上无处连续而在 $R^1\backslash A$ 上处处连续.

Hardy [87] 构造了一个在每个正无理点连续而在其他各点均间断的函数如下:

$$H(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+p^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & x = p/q,\ p, q \text{ 为互质的整数且 } q > 0, \\ x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

Bhakta [45] 研究了下列函数的性质: 对 $\alpha > 0, 0 \leqslant x \leqslant 1$, 令

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ 或 } x \text{ 为无理点}, \\ q^{-\alpha}, & x = p/q,\ p, q \text{ 为互质的整数且 } q > 0. \end{cases}$$

他指出, f_α 在 $[0,1]$ 的每个非零有理点都间断, 而在 $[0,1]$ 的其他点处都连续. 又当 $0 < \alpha < 1$ 时, f_α 在 $[0,1]$ 上无处可微; 当 $1 < \alpha \leqslant 2$ 时, f_α 在 $x = 0$ 处可微; 而当 $\alpha > 2$ 时, f_α 在 $[0,1]$ 上几乎处处可微.

Kristensen [100] 于 1968 年构造了一个定义在实直线上的函数, 它在每一有理点间断, 而在每一代数数的无理点处可微. 他还进一步证明了定义在实直线上的每个在有理点间断的函数, 一定存在不可微的无理点所成的稠密子集.

36. 在 Cantor 集上连续而在它的邻接区间上无处连续的函数.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, C 的邻接区间按它们的长度减小顺序进

行编号:

$$(a_1,b_1)=(1/3,2/3),\quad (a_2,b_2)=(1/9,2/9),$$
$$(a_3,b_3)=(7/9,8/9),\quad (a_4,b_4)=(1/27,2/27),$$
$$(a_5,b_5)=(7/27,8/27),\quad \cdots.$$

又设 $\{c_n\}$ 是一个实数序列且 $c_n\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$, $\lim_{n\to\infty}c_n=0$. 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ c_n, & x=(a_n+b_n)/2,\\ \text{线性}, & x\in[a_n,(a_n+b_n)/2]\ \text{或}\ [(a_n+b_n)/2,b_n].\end{cases}$$

易见, f 在区间 (a_n,b_n) 内的图像是折线, 所以当 $x_0\in(a_n,b_n)$ 时, f 在点 x_0 连续; 而当 $x_0\in C$ 时, $f(x_0)=0$, 由于 $c_n\to 0\,(n\to\infty)$, 从而

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,$$

因此, f 在点 x_0 也连续. 综上所述, 可知 f 在 $[0,1]$ 上处处连续. 又设

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为}\ [0,1]\ \text{中的有理点},\\ 0, & x\ \text{为}\ [0,1]\ \text{中的无理点},\end{cases}$$

并令

$$F(x)=f(x)g(x).$$

于是, 若 $x_0\in C$, 则 $f(x_0)=0$, 从而 $F(x_0)=0$. 由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, g 在 $[0,1]$ 上有界, 故

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=0.$$

因之, F 在点 x_0 连续. 因为 $x_0\in C$ 是任取的, 所以 F 在 C 上处处连续.

若 $x_0\in[0,1]\backslash C=\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 且 x_0 为有理点, 则

$$F(x_0)=f(x_0)\neq 0.$$

因为在 x_0 的任何邻域内恒有无穷多个无理点, 而在这种点上 F 的值是零, 所以 F 在点 x_0 间断. 同理可证, 当 $x_0\in[0,1]\backslash C$ 且 x_0 为无理点时, F 在点 x_0 也间断. 总之, F 在 $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 上处处间断.

37. 在 Cantor 集上无处连续而在它的邻接区间上连续的函数.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, (a_n,b_n) $(n=1,2,\cdots)$ 是它的邻接区间. 在 $[0,1]$ 上如下定义 f:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ 1, & x=(a_n+b_n)/2,\\ \text{线性}, & x\in[a_n,(a_n+b_n)/2]\ \text{或}\ [(a_n+b_n)/2,b_n].\end{cases}$$

易见, f 在 C 上无处连续而在 $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 上连续.

38. 在任意给定的 F_σ 型集上间断的函数.

对于一个给定的 F_σ 型集 $E=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中 $F_n\,(n=1,2,\cdots)$ 都是闭集, 可以认为这个序列是渐张的, 即 $F_n\subset F_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$. 事实上, 如果它不是渐张的, 那么, 我们就用 $F_1\cup F_2$ 代以 $F_2, F_1\cup F_2\cup F_3$ 代以 F_3, 等等. 于是, 新的闭集序列是渐张的, 且这些闭集的并集也是 E.

我们在 R^1 上定义函数 f_n 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/10^n, & x \text{ 是 } F_n \text{ 中的有理点},\\ 2/10^n, & x \text{ 是 } F_n \text{ 中的无理点},\\ 0, & x \text{ 不是 } F_n \text{ 中的点}.\end{cases}$$

显然, 函数 f_n 在集 F_n 的一切点间断, 而在 $R^1\backslash F_n$ 的一切点连续. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x),$$

因为 $|f_n(x)|\leqslant 2/10^n$, 故据 Weierstrass 的 M-判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 R^1 上是一致收敛的. 我们任取 $x_0\in R^1\backslash E$, 由于每个函数 f_n 在点 x_0 都是连续的, 故由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的一致收敛性可知, 函数 f 在点 x_0 也是连续的. 兹证, 对于任何 $x_0\in E$, f 在 x_0 都是间断的, 事实上, 可设 $x_0\in F_n$ 而 $x_0\overline{\in}F_{n-1}$, 于是, x_0 是函数 $f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}$ 的连续点, 而是函数 $f_n,f_{n+1},\cdots$ 的间断点, 并且函数 f_n 在点 x_0 处的振幅大于或等于 $1/10^n$, 函数 $f_{n+1},f_{n+2},\cdots$ 在点 x_0 处的振幅之和不大于

$$2/10^{n+1}+2/10^{n+2}+\cdots=2/9\cdot 10^n.$$

这样一来, 函数 f 在点 x_0 处的振幅大于或等于 $1/10^n-2/9\cdot 10^n$, 因而 f 在点 x_0 是间断的.

注 对于任何从 R^1 到 R^1 内的函数来说, 其间断点集都是一个 F_σ 型集 (参看 [118], p.84). 由于 R^1 内全体无理数所成之集不是一个 F_σ 型集, 因而不可能作出一个在每个有理点连续而又在每个无理点间断的从 R^1 上到 R^1 内的函数.

39. $[0,1]$ 上的一个函数 f, 它的连续点所成之集 A 与间断点所成之集 B 在 $[0,1]$ 内都稠密, 且对任何开区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, 交集 $A\cap(\alpha,\beta)$ 与 $B\cap(\alpha,\beta)$ 都具有连续统的势.

我们把区间 $[0,1]$ 分为两个不相交的集: 一个是在 $[0,1]$ 内稠密的 F_σ 型集 A, 另一个也是在 $[0,1]$ 内稠密的 G_δ 型集 B, 而且对任意非空开区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, 交集 $A\cap(\alpha,\beta)$ 与 $B\cap(\alpha,\beta)$ 都具有连续统的势 (这种分法的例子可以参看第一章例 37).

设 $A=\cup_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中 $\{F_n\}$ 是渐张的闭集序列, 并在区间 $[0,1]$ 上定义函数

f_n 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/10^n, & x \text{ 为 } F_n \text{ 中的有理点},\\ 2/10^n, & x \text{ 为 } F_n \text{ 中的无理点},\\ 0, & x \text{ 为 } [0,1]\backslash F_n \text{ 中的点}.\end{cases}$$

令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

则与例 38 的证明方法一样, 可得 f 在 B 上连续而在 A 上无处连续.

40. 不能在全轴上作连续扩张的有界集上的有界连续函数.

函数 $y=\sin(1/x)$ 在 $(0,1)$ 内连续且有界, 但是不能将它保持连续性而扩张到全轴上, 甚至不能将它保持连续性而扩张到闭区间 $[0,1]$ 上, 这是因为当 $x\to 0$ 时, 函数 $y=\sin(1/x)$ 不趋向于任何有限极限.

注 容易证明, 若函数 f 在 R^1 的有界子集上一致连续, 则可把它保持连续性而扩张到 R^1 上. 上述反例说明了在这个命题中一致连续性的条件不能去掉.

41. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的无界函数.

(i) 若 A 是实数的一个无界集, 令

$$f(x)=x, \quad x\in A.$$

(ii) 若 A 是实数的一个有界集, 但是非闭的. 设 c 为 A 的一个聚点且 $c\overline{\in}A$, 则令

$$f(x)=\frac{1}{x-c}, \quad x\in A.$$

易见, f 是非紧集 A 上的连续的无界函数.

注 定义在紧集上的连续函数必定有界 (参看 [39], p.21). 上述反例说明了定义在非紧集上的连续函数未必有界, 甚至对于任意给定的非紧集, 都可以构造一个定义在其上的连续的无界函数.

42. $(0,+\infty)$ 上的一个实值函数 f, 它在无穷多个点上连续, 且对每一 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)=0$ 当且仅当 $f(2x)\neq 0$.

下面的例子是由 Demos 作出的 [65]: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & 2^{2k}<x\leqslant 2^{2k+1},\\ 1, & 2^{2k-1}<x\leqslant 2^{2k},\end{cases}$$

这里, k 是任意整数, 则函数 f 具有所需的性质.

43. $[0,+\infty)$ **上的一个连续且有界的函数, 它在** $[0,+\infty)$ **上不一致连续.**

设 $f(x)=\sin x^2$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界. 但是, 它在 $[0,+\infty)$ 上并不一致连续.

注 可以证明, 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上必定一致连续. 上述反例说明了在这个陈述中, 不能把 "$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在" 代以 "f 在 $[0,+\infty)$ 上有界".

又, 定义在紧集上的连续函数必定是一致连续的 (参看 [39], p.23). 上述反例还说明了在这个陈述中, 函数的定义域是紧集的条件不可去掉.

44. 两个一致连续的函数, 其积不一致连续.

函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sin x$ 在 R^1 上都是一致连续的, 但是, 它们的乘积 $f(x)g(x)=x\sin x$ 在 R^1 上不一致连续.

注 容易证明, 假若函数 f 和 g 在它们共有的定义域 D 上都一致连续, 并且又都是有界的, 那么它们的乘积 fg 在 D 上也一致连续. 也容易证明, 在有界集上一致连续的任何函数在该集上都是有界的. 由此可见, 上述反例之所以可能, 只是由于所考虑的函数, 它们共有的定义域是无界的, 而且至少有一个函数是无界的.

45. 一个一致连续的函数, 其反函数不一致连续.

函数 $\ln x$ 在区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上是一致连续的, 但其反函数 e^x 在 $[\ln a,+\infty)$ 上并不一致连续.

46. 两个间断函数, 其最小值函数却是一致连续的.

在 R^1 上如下定义函数:

$$f(x)=x-[x],\quad g(x)=1-x+[x],$$

其中 $[x]$ 代表括号函数. 显然, 函数 f 和 g 在 x 为整数的点都不连续. 令

$$h(x)=\min\{x-[x],\ 1-x+[x]\}.$$

兹证 h 在 R^1 上一致连续.

事实上, 不妨设 $h(x)\geqslant h(y)$. 按 $h(y)$ 的定义, 存在自然数 n, 使 $|y-n|=h(y)$. 于是

$$h(x)\leqslant|x-n|\leqslant|x-y|+|y-n|,$$

从而

$$0\leqslant h(x)-h(y)\leqslant|x-y|.$$

由此可知, h 在 R^1 上是一致连续的.

47. 在开区间 I_1 与 I_2 上均一致连续, 但在 $I_1 \cup I_2$ 上不一致连续的函数.

置

$$f(x) = |\sin x|/x,$$

可证 f 在开区间 $I_1 = (-1,0)$ 及 $I_2 = (0,1)$ 上都是一致连续的. 事实上, 设

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ f(x), & 0 < x < 1, \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = \sin 1$, 所以函数 $F(x)$在闭区间 $[0,1]$ 上连续. 由 Cantor 定理知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 从而 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上也一致连续, 即 $f(x)$ 在开区间 I_2 上一致连续.

同理可证, $f(x)$ 在开区间 I_1 上也是一致连续的.

兹证 f 在 $I_1 \cup I_2 = \{x : 0 < |x| < 1\}$ 上不一致连续. 为此取 $x' > 0$, $x'' = -x' < 0$, 则

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{|\sin x'|}{x'} - \frac{|\sin x''|}{x''} \right| = 2\frac{\sin x'}{x'}.$$

由于 $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$, 故对于任意的 $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$, 无论正数 δ 取得怎样小, 必可取得正数 h, 使得 $|x' - x''| = h < \delta$, 而且

$$|f(x') - f(x'')| = 2\sin x'/x' \geqslant \varepsilon.$$

因此, f 在 $I_1 \cup I_2$ 上不是一致连续的.

48. 两个单调函数 f, g, 其中 f 连续而 g 间断, 但复合函数 $f \circ g$ 却是连续的单调函数.

在区间 $[0,2]$ 上定义函数 g 如下:

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ x+1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

显然, 函数 g 在 $[0,2]$ 上是递增的, 它有间断点 $x = 1$, 且 $g(0) = 0$, $g(2) = 3$. 我们再在区间 $[0,3]$ 上定义递增函数 f 如下:

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y < 2, \\ y-1, & 2 \leqslant y \leqslant 3. \end{cases}$$

容易看出, 复合函数 $f[g(x)]$ 恒等于 $x\,(0 \leqslant x \leqslant 2)$, 因而它是区间 $[0,2]$ 上的连续的单调函数.

注 容易证明, 若 $f(y)$ 是严格单调的连续函数, 而递增函数 $y = g(x)$ 在点 x_0 间断, 那么复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 必然间断. 上述反例说明了在这个陈述中, 函数 $f(y)$ 为严格单调的条件不能减弱为单调的条件.

49. 两个区间之间一个无处单调的一一对应.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 是有理数}, \\ 1-x, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

显然, f 在 $[0,1]$ 的任何非空子区间上都不可能是单调的. f 的值域也是 $[0,1]$, 而且 f 还是区间 $[0,1]$ 到其自身的一个一一对应.

类似地, 可以作出具有同样性质的将区间 $[a,b]$ 映到区间 $[c,d]$ 的函数:

$$g(x)=\begin{cases} c+(d-c)\dfrac{x-a}{b-a}, & \dfrac{x-a}{b-a} \text{ 是有理数}, \\ d+(c-d)\dfrac{x-a}{b-a}, & \dfrac{x-a}{b-a} \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

50. 两个严格递增的函数, 其积不是单调函数.

函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=x-1$ 在区间 $[0,1]$ 上都是严格递增的, 但其乘积 $f(x)g(x)=x(x-1)$ 在区间 $[0,1]$ 上既不递增也不递减.

51. 无处单调的连续函数.

在 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, 设 $f_1(x)=|x|$, 而在其他的 x 值处, 用 1 为周期来延拓 $f_1(x)$, 即: 对每个实数 x 和整数 n, 都有 $f_1(x+n)=f_1(x)$. 当 $n>1$ 时, 定义 $f_n(x)=4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$, 于是, 对于每个整数 n, f_n 是有周期 4^{-n+1} 的周期函数, 其极大值为 $\frac{1}{2}\cdot 4^{-n+1}$. 最后, 以 R^1 为定义域规定 f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

因为 $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4^{-n+1}$, 故据 Weierstrass 的 M-判别法, 这级数在 R^1 上一致收敛, 因此 f 在 R^1 上处处连续. 在任何形如 $a=k\cdot 4^{-m}$ 的点, 式中 k 是整数, m 是正整数, 当 $n>m$ 时就有 $f_n(a)=0$, 从而

$$f(a)=f_1(a)+\cdots+f_m(a).$$

对于任何正整数 m, 设 h_m 是正数 4^{-2m-1}. 于是, 当 $n>2m+1$ 时 $f_n(a+h_m)=0$, 所以

$$\begin{aligned} f(a+h_m)-f(a) &= [f_1(a+h_m)-f_1(a)]+\cdots+[f_m(a+h_m)-f_m(a)] \\ &\quad +f_{m+1}(a+h_m)+\cdots+f_{2m+1}(a+h_m) \\ &\geqslant -mh_m+(m+1)h_m=h_m>0. \end{aligned}$$

同样地,

$$f(a-h_m)-f(a)\geqslant -mh_m+(m+1)h_m=h_m>0.$$

由于形如 $a=k\cdot 4^{-m}$ 的点在 R^1 中是稠密的, 所以 f 不可能在一个非空开区间上单调.

注 还可进一步构造无处单调的可微函数和无处单调的绝对连续函数 (参看第三章例 38 和第十一章例 29).

52. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的有界函数, 它没有极值.

(i) 若 A 是一个无界的实数集, 令

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in A.$$

则 f 在 A 上没有极大值. 如果定义

$$f(x) = (-1)^{[|x|]}\frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in A,$$

此处 $[|x|]$ 是小于或等于 $|x|$ 的整数中最大者, 则 f 在 A 上既没有极大值也没有极小值.

(ii) 如果 A 是一个有界的非闭的实数集, 设 c 是 A 的一个聚点, 但 $c\overline{\in}A$. 令

$$f(x) = -|x-c|, \quad x \in A.$$

这时 f 在 A 上没有极大值. 如果定义

$$f(x) = (-1)^{\left[\frac{1}{|x-c|}\right]}\{L - |x-c|\},$$

其中方括号再一次用来表示 "括号函数", 而 L 是某个包含 A 的区间的长度, 这样的函数 f 在 A 上既没有极大值也没有极小值.

注 定义在紧集上的连续函数必有极值 (参看 [39], p.21). 上述反例说明了非紧集上的连续函数未必有极值, 甚至对于任意给定的非紧集, 都可以构造一个定义在其上的连续的有界函数, 它没有极值.

53. 定义域为紧集的没有局部极值的有界函数.

取闭区间 $[0,1]$ 作为定义域, 这是个紧集, 对于 $x \in [0,1]$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{n}{n+1}, & x = \dfrac{m}{n},\ m,n \text{ 为互质的整数, 且 } n > 0, \\ 0, & x \text{ 是无理数}, \end{cases}$$

则在 $[0,1]$ 的每个点的任一邻域内, f 的值能够任意逼近数 1 与 -1, 却总是介乎二者之间.

注 定义域为紧集的连续函数必有极值. 上述反例说明了在这个命题中, 不能把函数的 "连续性" 代以 "有界性".

54. 有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数.

设 $f(x) = -x, -1 \leqslant x < 1$; 又对任意 $x \in R^1$, 令 $f(x+2) = 2f(x)$, 则 f 是 R^1 到 R^1 上的函数, 且具有无穷多个局部极大值而无局部极小值.

55. 处处取得局部极小值的非常值函数.

设 E 是区间 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\backslash E,\\ 0, & x\in E,\end{cases}$$

则函数 f 具有所需的性质.

56*. 在每个区间上有一个真正局部极大的函数.

下面的例子属于 Posey 和 Vaugnan [128].

设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数集中一个处处稠密的集 (点点不同), 又设

$$g(x)=1-\min\{1,|x|\},$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x),$$

这里 $g_n(x)=A_ng(\frac{x-r_n}{\omega_n})$, 而正实数 A_n 和 ω_n 待定.

我们对 n 归纳地定义 g_n, 显然, 当 $|x-r_n|>\omega_n$ 时, $g_n(x)=0$. 以 I_n 表区间 $|x-r_n|\leqslant\omega_n$, 并称其为 g_n 的伴随区间. 我们还定义

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}g_j(x).$$

一般, 我们要求 (i) $0<A_n\leqslant 2^{-n}$; (ii) I_n 的端点异于所有的点 $r_j\,(j=1,2,\cdots)$; 和 (iii) 若 $j<n$, 则不是 (iii′) $r_n\overline{\in}I_j$ 且 ω_n 取得使 I_n 和 I_j 不相交, 就是 (iii″) $r_n\in I_j$ 且 ω_n 取得使 I_n 严格地位于 I_j 中、r_n 不属于的那一半. 例如, 若

$$r_j-\omega_j<r_n<r_j,$$

则

$$r_j-\omega_j<r_n-\omega_n<r_n+\omega_n<r_j.$$

归纳地取正常数 A_n 和 ω_n, 使 (i), (ii) 和 (iii) 成立. 显然, 由 (i) 知 f 的定义合理, 而且不管常数 ω_n 如何选取, 它总连续, 以后我们将改变某些常数 A_n 和 ω_n, 但总认为条件 (i), (ii) 和 (iii) 继续成立, 对选取 A_n 和 ω_n 的这些条件 (i), (ii) 和 (iii) 将不在构作的每一步中重复写出.

设 A_1 和 ω_1 按上述要求选取, 这样定义了 f_1. 作为"三角形"函数 g_n 的和, f_n 将取作适合

(a) f_n 在 r_n 有一个真正局部极大, 并且在 $(r_n-\omega_n,r_n)$ 上为线性递增, 在 $(r_n,r_n+\omega_n)$ 上为线性递减;

(b) 若 $I_n\subset I_j$ 且 $I_n\neq I_j$, 则 $j<n$ 且 $f_n(r_n)<f_j(r_j)$.

设 f_{n-1} 已经取好, 且适合 (a) 和 (b). 若 I_n 在 I_j 的外部, 这里 $j=1,2,\cdots,n-1$, 则 A_n 和 ω_n 不再改变, 而 (a) 和 (b) 对 f_n 也成立, 否则, 设 h 为不超过 $n-1$

的最大整数, 使 $r_n \in I_h$. 于是按前面所加的限制, I_n 或者严格地在 $(r_h - \omega_h, r_n)$ 内, 或者严格地在 $(r_h, r_h + \omega_h)$ 内, 而 f_h 在 I_n 上为线性的. 由 (a), $f_h(r_n - \omega_n)$ 和 $f_h(r_n + \omega_n)$ 都小于 $f_h(r_h)$, 所以 A_n 可以取得足够小, 以使 $f_n(r_n) < f_h(r_h)$. 若 $r_h \in I_j$, 这里 $j < h$, 则 $I_h \subset I_j$, 故由 (b), $f_h(r_h) < f_j(r_j)$, 于是 $f_n(r_n) < f_j(r_j)$, (b) 就成立. 固定 A_n, 我们可以减小 ω_n 直到 (a) 满足, 实际上, g_j 的最大和最小斜率为 $\pm A_j/\omega_j$, 因此只需要

$$\frac{A_n}{\omega_n} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{\omega_j}$$

就可以保证 (a) 成立, 因此归纳法完成, 而且条件 (i), (ii), (iii) 和 (a),(b) 都成立.

这样定义的函数 f, 在每个点 r_n 处有一个真正局部极大. 其实, 设 $x \in I_n$, 且 $x \neq r_n$, 则可证 $f(x) < f(r_n)$. 若 $x \overline{\in} I_j, j = n+1, n+2, \cdots$, 则由 (a), $f(x) = f_n(x) < f_n(r_n) \leqslant f(r_n)$. 现在设 h 是超过 n 的最小指标, 使 $x \in I_h$. 如果存在一个超过 n 的最大指标 k 使 $x \in I_k$ 成立, 则由 (a) 及 (b),

$$f(x) = f_k(x) < f_k(r_k) < f_n(r_n) \leqslant f(r_n).$$

如果这种 k 不存在, 则 $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x)$, 这里 $x \in I_{k_i}, i = 1, 2, \cdots$, 且所有的 $k_i > h$. 于是

$$f_{k_i}(x) < f_{k_i}(r_{k_i}) < f_h(r_h) < f_n(r_n),$$

因此

$$f(x) \leqslant f_h(r_h) < f_n(r_n).$$

57. 具有介值性质的间断函数.

在闭区间 $[0, 1/2]$ 上如下定义函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/2^n, n \text{ 为奇数}, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } x = 1/2^n,\ n \text{ 为偶数}, \\ \text{线性}, & 1/2^{n+1} \leqslant x \leqslant 1/2^n,\ n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

易见, f 在 $x = 0$ 不连续, 但 f 却具有介值性质. 即, 如果 M 是介于数 $f(0) = 0$ 和 $f(1/2) = 1$ 之间的任意实数, 那么在开区间 $(0, 1/2)$ 内至少可以找到一点 ξ, 使得 $f(\xi) = M$.

注 可以证明, 闭区间上的连续函数具有介值性质 (参看 [7], p.113). 上述反例说明了介值性质绝不是连续函数的特征, 对于不连续函数也是可以发生的.

58. 两个具有介值性质的函数, 其和却没有介值性质.

在 R^1 上如下定义函数:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

于是,

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$G'(x) = \begin{cases} 2x\cos(1/x) + \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

令 $f(x) = (F'(x))^2$, $g(x) = (G'(x))^2$, 则 f 和 g 都具有介值性质, 因为 F' 和 G' 都具有这个性质. 由于

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

因此, $f+g$ 在包含点 0 的任何区间上都不具有介值性质.

注 Smital[155] 构造了一个 Baire 第二类的具有介值性质的函数序列 $\{f_n\}$, 它一致收敛于函数 f, 而 f 不具有介值性质.

59. 定义在 $[0,1)$ 内而取值于 $[0,1]$ 中的一个无处连续函数, 它在每个任意小的非空子区间上都取尽 $[0,1]$ 中的一切值.

设 $x = 0.x_1x_2\cdots$ 为实数 x $(0 \leqslant x < 1)$ 的十进位小数展开 (可能有无穷多个零); 当数字序列 $x_1, x_3, x_5, \cdots$ 最后具有周期性且周期从第 x_{2n-1} 开始时, 设

$$f(x) = 0.x_{2n}x_{2n+2}x_{2n+4}\cdots,$$

否则就设 $f(x) = x$. 读者可自行证实, f 在区间 $[0,1)$ 上处处不连续.

我们将要证明, 在 $[0,1)$ 的每个不管怎样小的区间中, 函数 f 都取尽 $[0,1]$ 中的一切值.

事实上, 设 (r,s) 为 $[0,1)$ 中的任意一个子区间, 并设

$$r = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots,$$

则

$$r' = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots(\alpha_k+1)000\cdots > r,$$

且当 k 足够大时有 $r' < s$. 于是, 可以选取一个大于 k 的奇数 m, 使得

$$s' = r' + \frac{1}{10^m} = 0.\underbrace{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots(\alpha_k+1)0\cdots0}_{m\text{ 位}}10\cdots < s.$$

今若

$$y = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots$$

为 $[0,1]$ 中的任意的十进位小数, 则取

$$\xi = 0.\underbrace{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots(\alpha_k+1)0\cdots00}_{m+1\text{位}}x_{2n-1}\beta_1x_{2n+1}\beta_2x_{2n+3}\beta_3\cdots,$$

其中 $x_{2n-1}, x_{2n+1}, x_{2n+3}, \cdots$ 具有周期性且周期从 x_{2n-1} 开始. 于是 $\xi \in (r', s')$, 从而 $\xi \in (r, s)$ 且

$$f(\xi) = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots.$$

这个带根本性的例子是由 Lebesgue 作出的 (参看 [102], p.90, 也可参看 [53], 中译本 p.185).

利用例 59 中的函数 f, 我们可以构造一个定义域为 $[0,1)$ 的函数, 它在每个任意小的子区间上取尽一切实数值. 事实上, 设 f 是例 59 中的函数, 令

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/2, & f(x) = 0 \text{ 或 } f(x) = 1, \\ f(x), & f(x) \neq 0 \text{ 且 } f(x) \neq 1. \end{cases}$$

于是, 由等式

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - f_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)}$$

所定义的函数 φ 在 $[0,1)$ 的任何子区间内可以取得任何实数值.

60. 一个无处连续的开函数, 它在任何区间上都不具有介值性质.

由 R^1 上到 R^1 的函数称为开函数, 如果它把开集映成开集.

设 $F(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实值函数, 它在每个非空区间上取到每个实数值. 这种函数是存在的, 例如, 可参看第七章例 39. 令

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & F(x) \neq 0, \\ 1, & F(x) = 0, \end{cases}$$

则 f 不能取零值, 它在每个非空区间上取到异于零的任何实数值. 由此可见, f 是无处连续的开函数, 因为对每个非空开集 G, 我们有 $f(G) = (-\infty, \infty)\backslash\{0\}$. 由于 f 在每个非空区间上能取到异于零的任何值, 因而 f 在任何非空区间上都不具有介值性质.

这个问题是由 Marcus 提出并由 Erdös[69] 作出的.

注 Croft 指出[59], 在闭区间 $[0,1]$ 上存在一个非恒等于零而又几乎处处为零的第一类 Baire 函数, 它具有介值性质.

61. 一个无处连续函数 f, 而具有性质 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

利用有理数域上的实数 R^1 的线性空间的 Hamel 基, 能够构造这种函数.

集 $H \subset R^1$ 叫作 Hamel 基, 是指对任一 $x \in R^1$, 存在有理数 $\{a_\alpha\}$ 及 $\{h_\alpha\} \subset H$, 使

$$x = \sum a_\alpha h_\alpha,$$

其中和式是有限项的, 且表示法是唯一的.

易知, 用一个非零实数去遍乘 H 中的每一数后, 所得之数集仍为一个 Hamel 基, 故不妨设 Hamel 基为

$$H = \{1, h_1, h_2, \cdots, h_\alpha, \cdots\}.$$

因为对每个实数 x_0, 由 x_0 可唯一地表为

$$x_0 = a + a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n,$$

我们就定义 $f(x_0) = a$. 易见, 函数 f 满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

今证 f 在任意取定的一点 x_0 间断. 不妨设 x_0 如上. 在 H 中任取一个异于

$$h_1, h_2, \cdots, h_n$$

的 h, 用一串有理数去逼近 h^{-1}, 即设 $\{a_n\}$ 为一串有理数而 $a_n \to h^{-1}\,(n \to \infty)$, 于是

$$(1 - a_n h) \to 0 \quad \text{或} \quad (x_0 + 1 - a_n h) \to x_0 \quad (n \to \infty).$$

但由定义知 $f(x_0) = a$, $f(x_0 + 1 - a_n h) = a + 1$, 即有

$$(x_0 + 1 - a_n h) \to x_0 \quad (n \to \infty),$$

而

$$f(x_0 + 1 - a_n h) \nrightarrow f(x_0) \quad (n \to \infty),$$

所以 f 在 x_0 不连续.

62. 若干个半连续函数, 它们的和是一个无处半连续的函数

在以下各函数的定义中, 都假定 p, q 是互质的整数且 $q > 0$. 我们在 R^1 上如下定义函数:

$$f(x) = \begin{cases} 4/q, & x = p/q, q \text{ 为奇数}, \\ -2 - 4/q, & x = p/q, q \text{ 为偶数}, \\ -2, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & x = p/q, q \text{ 为奇数}, \\ 1 + 1/q, & x = p/q, q \text{ 为偶数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & x = p/q, q \text{ 为奇数}, \\ 3 + 1/q, & x = p/q, q \text{ 为偶数}, \\ 3, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

那么 f, g 和 h 各自都是处处半连续的, 而它们的和

$$f(x)+g(x)+h(x)=\begin{cases}-2+2/q, & x=p/q, q \text{ 为奇数},\\ 2-2/q, & x=p/q, q \text{ 为偶数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

是一个无处半连续的函数.

63. 两个半连续函数, 其最小值函数并不半连续.

在区间 $[0,+\infty)$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x>0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}\sin(1/x), & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见, 函数 f 在 $x=0$ 上半连续, g 在 $x=0$ 下半连续, 但

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\min\{f(x),g(x)\}=1>0>\underline{\lim_{x\to 0}}\min\{f(x),g(x)\}=-1,$$

这表示函数 $\min\{f,g\}$ 在 $x=0$ 既不上半连续也不下半连续.

64. 无处半连续的函数.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}, & x=m/n, n, m \text{ 为互质的整数, 且 } n>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则对任意 $x_0\in[0,1]$, 函数 f 在 x_0 都不是上半连续的, 这是因为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=1,$$

从而不可能有 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\, f(x)\leqslant f(x_0)$.

同理可证, f 在 x_0 也不是下半连续的.

65. 无处连续而又处处半连续的函数.

函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

是无处连续的, 但在有理点上, 它是上半连续的, 而在无理点上, 它是下半连续的.

66. 一个收敛的上半连续函数序列, 其极限函数并不上半连续.

将全体有理数排成 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$, 并在 R^1 上定义函数 f_n:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\},\\ 0, & x\overline{\in}\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}.\end{cases}$$

易知, 对每一 n, f_n 都是 R^1 上的上半连续函数. 然而, 极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

在 R^1 上并不上半连续.

由于 $f(x)=\sup f_n(x)$, 故知上半连续函数序列, 其上确界函数不必是上半连续的.

67. 一个不连续映射, 使开集的像是开集.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, 把 C 的邻接区间 $(1/3,2/3)$, $(1/9,2/9)$, $(7/9,8/9),\cdots$ 记为 $(\alpha_k,\beta_k)(k=1,2,\cdots)$, 并令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{\beta_k-\alpha_k}x+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta_k\pi}{\beta_k-\alpha_k}\right), & x\in(\alpha_k,\beta_k),\ k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

易见, f 是一个由 $[0,1]$ 到 R^1 上的不连续映射.

现在证明, f 把 $[0,1]\subset R^1$ 中的任意开集 G 映成 R^1 中的开集. 不妨设 G 非空, 于是根据 R^1 中非空开集的构造定理 (参看 [6], pp.30—31), G 可表成有限个或可数个两两不相交的开区间的并:

$$G=\bigcup_m I_m.$$

易见, $f(G)=\cup_m f(I_m)$. 因此, 我们只要证明 $f(I_m)$ 是 R^1 中的开集即可. 若 I_m 包含于某个开区间 $(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})$ 内, 则由映射 f 的定义可知, $f(I_m)$ 是开区间, 从而也是开集. 若 I_m 含有某个点 a_{k_0}(或 β_{k_0}), 则由集 C 的作法可知, 必定存在某个充分大的正整数 k, 使 $(\alpha_k,\beta_k)\subset I_m$, 从而

$$f((\alpha_k,\beta_k))\subset f(I_m).$$

另一方面, $f((\alpha_k,\beta_k))=(-\infty,+\infty)$, 因而

$$f(I_m)=(-\infty,+\infty),$$

所以 $f(I_m)$ 是开集.

68. 一个连续映射, 使某个无界闭集的像不是闭集.

容易证明, 如果 f 是 R^1 到 R^1 内的连续映射, 那么 f 必把 R^1 中的有界闭集映成闭集. 然而, f 不必把无界闭集映成闭集. 例如, 设 $F=(-\infty,+\infty)$, $f(x)=\arctan x$, 则 F 是无界闭集, f 是一个由 $(-\infty,+\infty)$ 到 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的连续映射, 且

$$f(F)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

因此, $f(F)$ 不是闭集.

注 有界闭集的连续像仍为闭集. 应当注意, 不能把这个命题中的闭集代以开集. 例如, 令 $f(x)=\sin x$, 并取 R^1 中的有界开集 $G=(0,2\pi)$, 则 $f(G)=[-1,1]$, 故 $f(G)$ 不是开集.

69. 一个疏集 A, 以及从 A 到单位闭区间 $[0,1]$ 上的一个连续映射.

设 A 为 Cantor 三分集 C, 对于任何 $x \in C$, 设 $0.c_1c_2c_3\cdots$ 是它的三进位小数展开式, 其中 $c_n = 0$ 或 $2, n = 1, 2, \cdots$, 再设

$$\varphi(x) = 0.\,\frac{c_1}{2}\,\frac{c_2}{2}\,\frac{c_3}{2}\cdots,$$

此处应将等式的右端理解为用数码 0 和 1 表示的二进位小数展开式. 显然, $\varphi(C) \subset [0,1]$. 可证 $[0,1] \subset \varphi(C)$. 事实上, 任取 $y \in [0,1]$, 设其二进位小数展开式为

$$y = 0.b_1b_2b_3\cdots.$$

于是

$$x = 0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\cdots$$

(按三进位制估值) 是 C 的一个点, 且 $\varphi(x) = y$, 这就说明了 $y \in \varphi(C)$. 因此 $[0,1] \subset \varphi(C)$. 不难证实 φ 的连续性.

注 因为一切 Cantor 集都是同胚的, 即任意两个 Cantor 集之间存在着一对一的连续映射, 且逆映射也是连续的 (参看 [76], 中译本 p.108), 所以例 69 中的集 A 可以是任何 Cantor 集.

第三章

微分

---

0. 引言.

在这一章的某些例子中, 导数这个概念允许用到无穷极限的情形:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +\infty,$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\infty.$$

然而, 可微函数这个概念仍限于在严格的意义上使用, 即函数在其定义域内各点处具有有限的导数.

类似地, 可以定义单侧导数 —— 右导数和左导数如下:

$$f'(x+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f'(x-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

显然, 要使导数 $f'(x)$ 存在, 必须且只需 f 在点 x 处的右导数和左导数存在而且相等.

为了本章及后面各章的需要, 我们把有关导数的熟知定理陈述如下:

Fermat 定理 设 f 定义在区间 $[a,b]$ 上, 若 f 在 $x\in(a,b)$ 处有局部极值且 $f'(x)$ 存在有限, 则 $f'(x)=0$.

Rolle 定理 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 如果: (i) f 在 $[a,b]$ 上连续, (ii) f 在开区间 (a,b) 上可微, (iii) $f(a)=f(b)$, 那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

Lagrange 中值定理 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可微, 则

至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

L'Hospital 法则 设函数 f, g 在 c 的某邻域内可微, $f(c)=g(c)=0$, 则

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

如果右边的极限存在 (有限实数).

在这一章的某些例子中, 还要涉及无穷级数的收敛, 绝对收敛和一致收敛, 以及一致收敛的 Weierstrass 的 M-判别法等基本概念和定理.

1. 仅在一点连续并可微的函数.

函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为无理数}, \\ 0, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

在 $x \neq 0$ 的点都间断, 而在 $x=0$ 处有导数 $f'(0)=0$, 这是因为当 h 是有理数时,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0,$$

而当 h 是无理数时,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h \to 0 \quad (h\to 0).$$

注 上述反例表明, 函数 f 在某点可微, 只能保证 f 在该点连续, 而不能保证 f 在该点的某个邻域内连续.

2. 存在一个可微函数 f, 而其绝对值函数 $|f|$ 并不可微.

函数 $f(x)=x$ 在 R^1 上可微, 然而, $|f(x)|=|x|$ 在 $x=0$ 处并不可微.

注 由上述反例及第二章例 20 可知, 函数 f 的可微性与 $|f|$ 的可微性之间并无内在联系.

3. 一个无处可微函数 f, 使 $\lim_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 存在.

设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

则 f 无处连续, 从而也无处可微.

但是, $\lim_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 却存在, 这是因为当 x 为有理数时, $f(x)=1$, $f(x+\frac{1}{n})=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = 0;$$

而当 x 为无理数时, $f(x)=0$, $f(x+\frac{1}{n})=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = 0.$$

注 若 f 在点 x_0 可微, 则 $\lim_{n\to\infty} n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$ 必定存在. 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

4. 关于乘积函数可微性的例子.

关于乘积函数的可微性, 我们熟知定理: 若函数 f 与 g 在 x_0 处皆可微, 则 fg 在 x_0 处亦可微. 但当 f 或 g 在 x_0 处不同时可微时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 可微, $g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可微, 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=0,$$

因而 fg 在 $x=0$ 可微, 且 $(fg)'(0)=0$.

(b) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 可微, $g(x)=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 不可微, 而乘积函数

$$f(x)g(x)=x\operatorname{sgn} x=|x|$$

在 $x=0$ 不可微.

(c) $f(x)=g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可微, 而乘积函数 $(fg)(x)=x^2$ 在 $x=0$ 可微.

(d) $f(x)=g(x)=|x|^{1/2}$ 在 $x=0$ 不可微, 而乘积函数 $(fg)(x)=|x|$ 在 $x=0$ 也不可微.

总之, 可列出下表

	f 在 $x=x_0$	g 在 $x=x_0$	fg 在 $x=x_0$	例
1	可微	可微	可微	定理
2	可微	不可微	可微	(a)
3	可微	不可微	不可微	(b)
4	不可微	不可微	可微	(c)
5	不可微	不可微	不可微	(d)

5. 关于复合函数可微性的例子.

关于复合函数的可微性, 我们熟知定理: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微, $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 可微, 则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 可微. 但当 $f(x)$ 在 $x=x_0$, $g(y)$ 在 $y=y_0$ 不同时可微时, 可以有下述各种不同的结果:

(a) $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 可微, $g(y)=|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=x^2$$

在 $x=0$ 可微.

(b) $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 可微, $g(y)=|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=|\sin x|$$

在 $x=0$ 不可微.

(c) $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 不可微, $g(y) = y^2$ 在 $y_0 = f(0) = 0$ 可微, 而复合函数

$$g[f(x)] = x^2$$

在 $x = 0$ 可微.

(d) $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 不可微, $g(y) = \sin y$ 在 $y_0 = f(0) = 0$ 可微, 复合函数

$$g[f(x)] = \sin |x|$$

在 $x = 0$ 不可微.

(e) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ 在 $x = 0$ 不可微, $g(y) = 2y + |y|$ 在 $y_0 = f(0) = 0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)] = x$$

在 $x = 0$ 可微.

(f) $f(x) = \sin |x|$ 在 $x = 0$ 不可微, $g(y) = |y|$ 在 $y_0 = f(0) = 0$ 不可微, 复合函数 (在 $x = 0$ 的某个邻域内)

$$g[f(x)] = |\sin |x|| = \sin |x|$$

在 $x = 0$ 不可微.

总之, 可列出下表

	$f(x)$ 在 $x = x_0$	$g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$	$g[f(x)]$ 在 $x = x_0$	例
1	可微	可微	可微	定理
2	可微	不可微	可微	(a)
3	可微	不可微	不可微	(b)
4	不可微	可微	可微	(c)
5	不可微	可微	不可微	(d)
6	不可微	不可微	可微	(e)
7	不可微	不可微	不可微	(f)

注 Miloslav [115] 构造了两个无处可导 (有限或无穷导数) 的实值连续函数 f, g, 使复合函数 $f \circ g$ 在某些点上有有限导数.

6. 处处有导数 (不必有限) 的不连续函数.

设

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

则

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = +\infty,$$

而当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 0$.

7. 两个在点 x_0 均可微, 而使 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 x_0 都不可微的函数 f 和 g.

设

$$f(x) = x - a, \quad g(x) \equiv 0,$$

则 f 和 g 在 $x = a$ 处均可微. 然而, 容易看出, 最大值函数和最小值函数

$$\max\{f,g\} = \begin{cases} x - a, & x \geqslant a, \\ 0, & x < a \end{cases}$$

和

$$\min\{f,g\} = \begin{cases} x - a, & x < a, \\ 0, & x \geqslant a \end{cases}$$

在 $x = a$ 均不可微.

注 容易证明, 若 f, g 在 a 处可微, 且 $f(a) \neq g(a)$, 则 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 在 a 处也可微. 上述反例说明了在这个陈述中, 条件 $f(a) \neq g(a)$ 是不能去掉的.

8. $[a,b]$ 上的函数 f, 它满足 Rolle 定理的三个条件中任两个条件, 但不存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

(1) 设

$$f(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

则 f 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续, 并且 $f(-1) = f(1) = 0$, 即 f 满足定理的条件 (i) 和 (iii). 还有, 对 $(-1,1)$ 中除 $x = 0$ 外的所有 x, $f'(x)$ 存在且有限:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

然而, 在 $(-1,1)$ 中就没有 ξ 能使 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设

$$f(x) = x - [x], \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

其中 $[x]$ 代表括号函数, 易见, f 在 (0,1) 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 即 f 满足定理的条件 (ii) 和 (iii). 然而, 由于 $f'(x) = 1, 0 < x < 1$, 因此, 不存在如此之 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

(3) 设

$$f(x) = x, \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

则 f 在 $[0,1]$ 上连续且可微, 从而 f 满足定理的条件 (i) 和 (ii). 但由于 $f'(x) \equiv 1$, 因而不存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

注 上述例子说明, Rolle 定理的三个条件, 无论哪两个都不足以保证导函数在 (a,b) 内某点取值为零, 换句话说, 三个假设中任一个都不能去掉.

9. 函数 f, 它在 $[a,b]$ 上有连续的导函数 f', 但对 $[a,b]$ 内某点 ξ, 不存在 x_1, x_2, 使得 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$, $x_1<\xi<x_2$.

设

$$f(x)=x^3,\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

则导函数 $f'(x)=3x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续. 取 $\xi=0$, 则 $f'(\xi)=0$, 但是不存在点 x_1 及 x_2 $(x_1<0<x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(0)=0,$$

因为否则将会有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=0,$$

然而这是不可能的.

注 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内可微, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

上述反例表明, 给定了某点 $\xi\in(a,b)$, 未必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

10. 中值定理失效的可微复值函数.

我们需要让所论函数的值域超出实数系. 在实轴上定义

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad -\infty<x<+\infty,$$

此函数是处处连续和可微的, 但是不存在区间 $[a,b], a<b$, 使得在 a 与 b 之间能有某个 ξ, 满足等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即

$$(\cos b+i\sin b)-(\cos a+i\sin a)=(-\sin\xi+i\cos\xi)(b-a).$$

事实上, 假定上述等式成立, 则等式两边的模 (绝对值) 的平方亦应相等, 即

$$(\cos b-\cos a)^2+(\sin b-\sin a)^2=(b-a)^2,$$

于是, 利用基本恒等式将得出

$$\sin^2\frac{b-a}{2}=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

但这是不可能的, 因为没有一个正数 h 能够使 $\sin h=h$.

注 上述反例说明, 对于复值函数而言, 中值定理不再成立.

11. L'Hospital 法则失效的复值函数的不等式.

设 $f(x)=x$, $g(x)=x+x^2e^{i/x^2}$, $0<x<1$, 由于对一切实数 t, 都有 $|e^{it}|=1$, 因而不难看出

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{1}$$

另一方面, 有

$$g'(x)=1+\left(2x-\frac{2i}{x}\right)e^{i/x^2},\quad 0<x<1,$$

所以

$$|g'(x)|\geqslant\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geqslant\frac{2}{x}-1,$$

于是得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0. \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知对复值函数不定式的定值问题, L'Hospital 法则不再成立.

12. 一个在某点有极值的无穷可微函数, 它的各阶导数在该点的值全都是零.

Scheeffer 给出了一个具有这种性质的函数 (参看 [144], p.542.) 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则当 $x\neq 0$ 时, $f(x)-f(0)=e^{-1/x^2}>0$, 因此函数 f 在点 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

另一方面,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0\quad\left(\text{其中 } y=\frac{1}{x}\right),$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3},\quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2}+\frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

所以

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-1/x^2}}{x^4}=0.$$

如上已得

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,$$

故不妨设 $f^{(n)}(0)=0\ (n\geqslant 2)$, 则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}.$$

显然, 当 $x\neq 0$ 时, $f^{(n)}(x)$ 为形如

$$\frac{Ce^{-1/x^2}}{x^k}$$

的函数之和, 其中 C 为常数, k 为正整数. 而对任意的正整数 k, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^k}=0,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=0,$$

即 $f^{(n+1)}(0)=0$, 于是由归纳法得 $f^{(n)}(0)=0,\ n=1,2,\cdots$.

在上面这个例子中, 函数的各阶导数在 $x=0$ 的值都不是经直接代入而得到的. 针对这一点, Pringsheim 给出更好的例子如下 (参看 [129], pp.153—184): 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}-\left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2n}}x^{2n}\right\},$$

其中 $a>1$. 不难验证, 上述级数可以逐项求各阶导数, 经过直接计算, 得到

$$f^{(n)}(0)=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

13. 一个连续函数, 它在原点的每个邻域内有无穷多个局部极值.

设

$$f(x)=\begin{cases}|x|(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则当 $x>0$ 时, 有

$$f'(x)=2+\cos(1/x)+\sin(1/x)/x.$$

易见, 当 x 与 0 充分接近时, $f'(x)$ 变号无数次, 于是由函数的连续性即知, 在 $x=0$ 的附近, $f(x)$ 有无穷多个局部极值.

14. 函数 f, 使 $\lim_{h\to 0}[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]/h^2$ 存在而 $f''(x)$ 不存在.

在区间 $[-1,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

经直接计算可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)+h^2\sin(-1/h)}{h^2}=0.$$

但是, 由于导函数

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处间断, 因而 $f''(0)$ 不存在.

注 若 $f''(x)$ 存在, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

也存在且等于 $f''(x)$ (参看 [141], 中译本 p.128). 上述反例说明了这个命题的逆命题不成立.

15. $[0,1]$ **上的一个可微函数, 其导数在无理点连续而在有理点间断.**

在 $[0,1]$ 上定义函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$g'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续而在 $x=0$ 处间断

设 $\{r_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(x-r_n).$$

显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-r_n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 因而 (参看 [98], 中译本 pp.223—224)

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-r_n),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

于是, f' 在 $[0,1]$ 中的任一无理点连续而在任一有理点间断.

16. $[0,1]$ **上的一个可微函数, 其导数在已给的非空完备疏集上无处连续.**

设 E 为 $[0,1]$ 中的非空完备疏集, (α_n,β_n) $(n=1,2,\cdots)$ 是它的邻接区间, 在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2\sin\dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}, & x\in(\alpha_n,\beta_n),\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上连续, 对每一 $x\in(\alpha_n,\beta_n)$, f 在 x 处可微且

$$\begin{aligned}f'(x)=&\,2(x-\alpha_n)(\beta_n-x)(\alpha_n+\beta_n-2x)\sin\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}\\&-\frac{2(\alpha_n+\beta_n-2x)}{(x-\alpha_n)(\beta_n-x)}\cos\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}.\end{aligned}$$

其实, 对每一 $x_0\in E$, f 在 x_0 处也可微且

$$f'(x_0)=0.$$

为证实这一结论, 我们先设 $x>x_0$. 若 $x\in E$, 则

$$f(x)-f(x_0)=0-0=0.$$

若 x 含于某个邻接区间 (α_n,β_n) 内, 则

$$|f(x)-f(x_0)|=(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2\left|\sin\frac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n-x)^2}\right|,$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}&\leqslant\frac{(x-x_0)^2(\beta_n-x)^2}{x-x_0}\\&=(x-x_0)(\beta_n-x)^2\to 0\quad(x\to x_0+),\end{aligned}$$

于是得到

$$f'(x_0+) = 0.$$

同理可得

$$f'(x_0-) = 0.$$

因之 $f'(x_0) = 0$.

综上所述, f 在 $[0,1]$ 上处处可微. 由 f' 的解析表达式易知, f' 在 $[0,1]\setminus E$ 上连续而在 E 上无处连续.

17. 一个具有连续导数的严格递增函数, 其导数在已给的完备疏集上恒为零.

设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集, 令

$$\varphi(x) = d(x,E) = \inf_{y\in E} |x-y|.$$

则 φ 在 $[0,1]$ 上连续, 且当 $x\in E$ 时, $\varphi(x)=0$, 而当 $x\overline{\in}E$ 时, $\varphi(x)>0$ (参看 [6], pp.33—34). 在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt,$$

则对任意 $x\in[0,1]$, 都有 $f'(x)=\varphi(x)$. 特别, 当 $x\in E$ 时, 有 $f'(x)=0$. 此外, f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 为验证这一结论, 我们任取两点 x_1 和 x_2, $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$, 由于 E 是疏集, 因而在这两点之间存在着不含有 E 中的点的开区间 (α,β), 于是

$$f(x_2)-f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)dt \geqslant \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = \varphi(\xi)(\beta-\alpha),$$

其中 $\alpha<\xi<\beta$. 因为 $\xi\overline{\in}E$, 所以 $\varphi(\xi)>0$, 从而 $f(x_2)>f(x_1)$. 得所欲证.

18. 一个严格递增的连续函数, 它不处处可微.

下面的例子是由 Pringsheim 作出的. 令

$$f(x) = \begin{cases} x\left\{1+\dfrac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

易见, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 因为当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1+\frac{1}{3}\sin(\ln x^2)+\frac{2}{3}\cos(\ln x^2) > 0,$$

所以 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是严格递增的. 又当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 而当 $x<0$ 时, $f(x)<0$. 可见 f 在 $(-\infty,\infty)$ 内也是严格递增的. 但由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left\{1+\frac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}$$

不存在, 因而 f 在 $x=0$ 处不可微.

注 有人或许会猜测, 严格单调函数的不可微的点都是一些间断点. 上述反例说明了这种猜测是不正确的.

19. 一个单调函数, 其导函数并不单调.

设

$$f(x) = 2x + \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

则

$$f'(x) = 2 + \cos x > 0,$$

所以函数 f 在区间 $[0, 2\pi]$ 上是递增的. 又因为 $f''(x) = -\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的符号不定, 故 f' 在 $[0, 2\pi]$ 上不是单调的.

20. R^1 上的一个严格单调的有界可微函数 f, 使 $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) \neq 0$.

对非负整数 n, 令

$$f(n) = 1 - 2^{-n}.$$

然后按下列方式把 f 的定义域扩张到全体非负实数上, 对每一非负整数 n, 在区间 $[n, n+1]$ 上函数 f 与 f_n 相一致. 这里, f_n 是 $[n, n+1]$ 上的任一单调可微函数, 适合

$$f_n(n) = f(n), \quad f_n(n+1) = f(n+1), \quad f_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \{f(n) + f(n+1)\}/2,$$

$$f_n'(n) = f_n'(n+1) = 0, \quad f_n'\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1.$$

例如, 在每个区间 $[n, n+1]$ 上可以适当选择两个椭圆的弧段作为函数 f_n 的图像 (参看图 1), 可使 f_n 满足适才提到的全部条件.

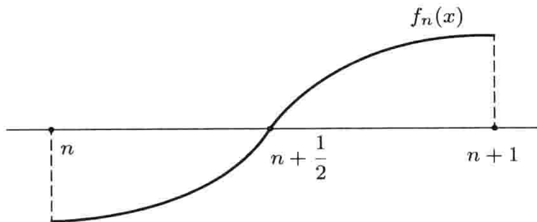


图 1

其次, 令 $f(-x) = -f(x)$, 则 f 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界可微函数. 显然, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调, 且 $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) \neq 0$. 其实, 这个极限根本不存在, 因为 f' 在每个闭单位区间上, 恒能达到 0 和 1.

上面的构造法属于 Moran [117].

注 如果 f 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调有界的可微函数, 那么, 从 f 的图形上看似乎应该有

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0.$$

上述反例说明了这种仅凭直觉的判断是不正确的.

21. 一个在某点有极值的可微函数, 它在该点的左右两侧都不是单调的.

设

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

则当 $x\neq 0$ 时,

$$f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0.$$

因此, f 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=2$.

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x}.$$

易见, 上式右端的第一项当 x 趋于零时它趋于零, 而 $\cos\frac{1}{x}$ 振荡于 -1 与 $+1$ 之间. 因此, f' 在 $x=0$ 的附近变号无数次, 从而 f 在 $x=0$ 的左右两侧都不可能是单调的.

22. 一个可微函数 f, 使 $f'(x_0)>0$, 但 f 在包含点 x_0 的任何开区间内都不是单调的.

设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

它在 $x=0$ 处的导数为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}>0.$$

但是, f 在任一包含点 $x=0$ 的开区间上都不是单调的. 实际上, 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=1,2,\cdots)$ 时,

$$f'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k,$$

从这个式子可以看出, 在包含零点的任意开区间内, 导数可以取不同符号的值, 因此, f 在这个开区间上不是单调的.

23. 函数 f, 使 $f(x)$ 与 $\overline{f}(x)=\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x-h)]/(2h)$ 在 $x=x_0$ 都连续而 $f'(x_0)$ 并不存在.

在 R^1 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}1/n, & x=\pm 1/n, n \text{ 为正整数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

不难验证, 对任一实数 x, 都有 $\bar{f}(x) \equiv 0$, 故 $\bar{f}$ 连续. 又, f 在 $x=0$ 处也连续. 然而, f' 在 $x=0$ 处并不存在.

这个例子是由 Haines 和 Leetch 作出的[81].

24. 一个可微函数 f, 当 x 为有理数时, $f(x)$ 为有理数, 而 $f'(x)$ 为无理数.

在区间 $[-1/2, 1/2]$ 上定义函数 g 如下:

$$g(y) = y(1-4y^2),$$

然后把 g 以 1 为周期扩张到整个 R^1 上, 成为周期函数. 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n!x)}{(n!)^2}. \tag{1}$$

由于 $g(0)=0$, 而 g 是以 1 为周期的函数, 故 g 在所有整数点处的值都是 0, 且在整数点处导数的值为 1; 此外, 对任何有理数 x, 级数 (1) 至多有有限个非零项, 而且每个非零项都是有理数, 因此, $f(x)$ 为一有理数.

不难验证, 级数 (1) 的导函数级数一致且绝对收敛, 从而收敛于 f 的导函数. 对任何有理数, 级数 (1) 的导数在该点的值等于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ (其和为 e), 顶多除去有限个有理项. 因此, 对有理数 x, $f'(x)$ 是数 e 加上某个有理数, 而 e 是无理数, 从而 $f'(x)$ 也是无理数.

25. $(0,1)$ 上的一个可微函数 f, 使 $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$, 但 $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$ 并不成立.

设

$$f(x) = 1/x + \cos(1/x), \quad 0 < x < 1,$$

则

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty.$$

又

$$f'(x) = (\sin(1/x) - 1)/x^2, \quad 0 < x < 1.$$

若令 $x_n = 1/\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$, 则 $f'(x_n) = 0$. 因此 $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$ 并不成立.

26. $(0,1)$ 上的一个可微函数 f, 使 f 在 $(0,1)$ 上有界而 f' 在 $(0,1)$ 上无界

设

$$f(x) = 2\sqrt{x}, \quad 0 < x < 1,$$

则 f 在 $(0,1)$ 上可微且有界. 然而, 导函数

$$f'(x) = 1/\sqrt{x}$$

在 $(0,1)$ 上无界.

注 容易证明, 若函数 f 在有限区间 (a,b) 上可微, 则 f 在 (a,b) 上无界蕴涵着 f' 在 (a,b) 上无界. 上述反例说明了这个命题倒过来是不正确的.

27. 在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 没有导数的连续函数.

函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

具有所需的性质.

28. 在无理点可微而在有理点不可微的连续函数.

设 r_k $(k = 1, 2, \cdots)$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k},$$

则对每一 k, 函数 $f_k(x) = |x - r_k|/3^k$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $|f_k(x)| \leqslant 1/3^k$. 因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 从而其和函数 f 在 $[0,1]$ 上也连续 (参看 [7], p.642).

现证 f 在任一无理点 $x_0 \in [0,1]$ 可微, 而在任一有理点 $r_k \in [0,1]$ 不可微.

事实上, 若 $x_0 \in [0,1]$ 是无理点, 则 $x_0 - r_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 由于函数 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 处可微, 因而当 x_0 为无理点时,

$$f_k'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_k(x_0 + x) - f_k(x_0)}{x}$$

存在, 且由下式

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_k(x_0 + x) - f_k(x_0)}{x} \right| &= \frac{1}{3^k} \left| \frac{|x_0 + x - r_k| - |x_0 - r_k|}{x} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{3^k} \frac{|x_0 + x - r_k - (x_0 - r_k)|}{|x|} = \frac{1}{3^k}, \end{aligned}$$

得到

$$|f_k'(x_0)| \leqslant 1/3^k,$$

从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x_0)$ 收敛. 令

$$|g_k(x)| = \left| \frac{f_k(x_0 + x) - f_k(x_0)}{x} \right|,$$

则由于对任一 x, 恒有 $|g_k(x)| \leqslant 1/3^k$, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在任何区间上一致收敛, 于是

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to 0} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x_0), \end{aligned}$$

这就证明了 f 在 x_0 处可微.

若 $x_0 \in [0,1]$ 是有理点, $x_0 = r_{k_0}$, 则当 $k > k_0$ 时, $x_0 \neq r_k$, 于是仿照前面的证明可知, 函数

$$h(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}$$

在 x_0 处可微, 而

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}|x - r_1| + \frac{1}{3^2}|x - r_2| + \cdots + \frac{1}{3^{k_0-1}}|x - r_{k_0-1}| + \frac{1}{3^{k_0}}|x - r_{k_0}| + h(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k_0-1}(x) + f_{k_0}(x) + h(x), \end{aligned}$$

又 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{k_0-1}(x)$ 在 $x = r_{k_0}$ 处可微, $h(x)$ 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处也可微, $f_{k_0}(x)$ 在 $x_0 = r_{k_0}$ 不可微, 于是推知 f 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处不可微.

29. 处处连续而无处可微的函数.

第一个无处可微的连续函数的例子是由 Weierstrass 给出的:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

此处 $0 < b < 1$, a 为一正奇数. 此级数在任何区间上都一致收敛, 所以 f 处处连续. 另一方面, 若 $ab > 1$, 则由逐项微分得到的级数发散. 这个事实本身并没有证明 f 不可微, 但却提供了这方面的可能性. 我们将要证明: 若 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, 则在任何点 x 处, 函数 f 都没有有限的导数.

首先, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)}{h} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} = S_m + R_m. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} |\cos\{a^n\pi(x+h)\} - \cos(a^n\pi x)| &= |a^n\pi h \sin\{a^n\pi(x+\theta h)\}| \\ &\leqslant a^n\pi|h|, \quad \text{其中 } 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

所以

$$|S_m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \pi \frac{a^m b^m}{ab - 1}.$$

其次, 我们给 h 以特定的数值, 而为 R_m 求一下限. 为此, 记

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

此外 α_m 为一整数, 而 $-\frac{1}{2} \leqslant \xi_m < \frac{1}{2}$. 命

$$h = \frac{1 - \xi_m}{a^m},$$

则有

$$0 < h \leqslant \frac{3}{2a^m}$$

及

$$a^n\pi(x+h)=a^{n-m}a^m\pi(x+h)=a^{n-m}\pi(\alpha_m+1).$$

因为 a 是奇数, 所以

$$\cos\{a^n\pi(x+h)\}=\cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)\}=(-1)^{\alpha_m+1}.$$

又因

$$\begin{aligned}\cos(a^n\pi x)&=\cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)\}\\&=\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\\&=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m),\end{aligned}$$

所以

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty}b^n\{1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\}.$$

由于上式右端的级数的每一项都是正的, 故若只取第一项, 便得

$$|R_m|>\frac{b^m}{|h|}>\frac{2}{3}a^mb^m.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|&\geqslant|R_m|-|S_m|\\&>\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)a^mb^m.\end{aligned}$$

若 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 则括号内的因子取正值; 故当 $m\to\infty$, $h\to0$ 时, 不等式的右方趋向无穷. 所以 f 在点 x 处不可微. 由于 x 是任取的, 因而 f 无处可微.

下面的无处可微的连续函数是由 Van der Waerden 于 1930 年提出的:

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^nx\}}{10^n},$$

其中记号 $\{y\}$ 表示数 y 与它最近整数间的距离. 例如,

$$\{3.1\}=0.1,\quad\{3.5\}=0.5,\quad\{-6\}=0,\quad\{1.83\}=0.17.$$

我们依次考虑并证明下述命题:

(i) 设 $f_0(x)=\{x\}$, 则 f_0 是具有单位周期的连续函数, 它在 $[0,1]$ 上的解析表达式为

$$f_0(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant1/2,\\1-x, & 1/2<x\leqslant1.\end{cases}$$

事实上, 任取 $x\in R^1$, 由 $\{x\}$ 的定义显然有

$$f_0(x+1)=f_0(x),$$

且对任意 $l\in R^1$, $l<1$, $f_0(x+l)\neq f_0(x)$, 故 f_0 具有单位周期.

又, 任取 $x\in[0,1]$, 当 $x\in[0,1/2]$ 时, $\{x\}=x$; 当 $x\in(1/2,1]$ 时, $\{x\}=1-x$,

故

$$f_0(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 1-x, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然, $f_0(x)=\{x\}$ 是连续的, 它的图像如下:

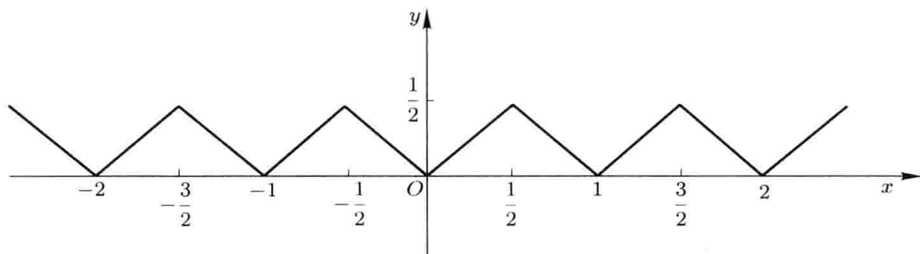


图 2

(ii) 函数

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

在 R^1 上连续.

事实上, 设 $f_n(x)=\{10^n x\}$, 则

$$f_n\left(x+\frac{1}{10^n}\right)=\left\{10^n\left(x+\frac{1}{10^n}\right)\right\}=\{10^n x+1\}=\{10^n x\}=f_n(x).$$

显然, $\frac{1}{10^n}$ 是满足 $f_n(x+l)=f_n(x)$ 的最小正实数, 故 $f_n(x)$ 具有周期 $\frac{1}{10^n}$. 又由 (i) 知, $f_n(x)$ 在 R^1 上连续, 且 $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2}$, 因而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(x)}{10^n}$$

在 R^1 上一致收敛, 所以和函数 $W(x)$ 在 R^1 上连续.

(iii) 函数 $W(x)$ 在 R^1 上处处不可微.

为证明这个结果, 我们只要证明对任意 $x_0\in R^1$, 存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R^1$, 使得 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W(x_n)-W(x_0)}{x_n-x_0}$$

不存在就可以了. 对任意 n, 在 R^1 中选取 x_n 满足 $|x_n-x_0|=\frac{1}{10^n}$ (取 $x_n=x_0\pm\frac{1}{10^n}$ 即可), 则当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to x_0$. 固定 n, 当 $k\geqslant n$ 时, $\frac{1}{10^n}$ 是 $f_k(x)$ 的周期 $\frac{1}{10^k}$ 的整数倍, 所以

$$f_k(x_n)=f_k(x_0)\quad(k\geqslant n),$$

从而

$$f_k(x_n)-f_k(x_0)=0\quad(k\geqslant n).$$

当 $k \leqslant n-1$ 时, $f_k(x_n) - f_k(x_0) = \pm 10^{k-n}$, 因此

$$\frac{W(x_n)-W(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x_n)-f_n(x_0)}{10^k(x_n-x_0)} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pm 10^{k-n}}{10^k(\pm 10^{-n})} = \sum_{k=0}^{n-1}(\pm 1).$$

这就是说, 对于任意的正整数 n, $[W(x_n)-W(x_0)]/(x_n-x_0)$ 是 n 项之和, 其中每一项是 $+1$ 或 -1. 由此推得当 n 是奇数时, $[W(x_n)-W(x_0)]/(x_n-x_0)$ 是一个奇数, 而当 n 是偶数时, $[W(x_n)-W(x_0)]/(x_n-x_0)$ 是一个偶数. 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W(x_n)-W(x_0)}{x_n-x_0}$$

不存在.

注 Marchis[107] 把 Van der Waerden 函数作了推广, 他指出, 函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\{p^n x\} \quad (p>1 \text{ 是整数})$$

在 $[0,1]$ 上连续而无处可微. 当 $p=10$ 时, $f(x)$ 就是 Van der Waerden 函数.

Schubert[146] 利用 Van der Waerden 函数而构造了在 $[0,1]$ 的某个正测度集上为 0 且在 $[0,1]$ 上连续而无处可微的函数. 他的作法如下: 任给 ε $(0<\varepsilon<1)$, 我们用 C_ε 代表 $I=[0,1]$ 中的完备疏集, 使

$$mC_\varepsilon > 1-\varepsilon.$$

于是 $C_\varepsilon = I\setminus \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 $E_n=(a_n,q_n)$ 是 I 中两两不相交的开区间. 考虑 $[0,1]$ 上处处连续而无处可微的 Van der Waerden 函数

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}.$$

注意, $W(0)=W(1)=0$. 我们在 I 上如下定义函数 f: 在 C_ε 上, 令 $f\equiv 0$, 而在 E_n $(n=1,2,\cdots)$ 的闭包 $\overline{E}_n$ 上, 定义 f 为相应的 Van der Waerden 函数. 于是, f 在 I 上连续而无处可微, 且在正测度集 C_ε 上, $f\equiv 0$.

对于任给的完备疏集 $E\subset[0,1]$, Lipiński[105] 也作出了一个在 $[0,1]$ 上无处可微的连续函数 f, 使当 $x\in E$ 时, $f(x)=0$, 而当 $x\in[0,1]\setminus E$ 时, $f(x)>0$.

上面这些处处连续而无处可微的函数都是通过取极限的手续而得到的. 针对这一情况, Bush[50] 构造了一个不通过取极限手续的处处连续而无处可微的函数.

柳孟辉[5] 只用了函数、连续性与可微性等几个必要的概念而构造了一个无处可微的处处连续函数.

30. 处处连续而仅在一点可微的函数.

设 g 是 R^1 上的无处可微的连续函数 (参看例 29). 令 $f(x)=xg(x)$, 则 f 是 R^1 上的连续函数. 由于

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hg(h)}{h}=\lim_{h\to 0}g(h)=g(0),$$

所以 f 在 $x=0$ 处可微且 $f'(0)=g(0)$. 当 $x\neq 0$ 时,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=x\frac{g(y)-g(x)}{y-x}+g(y),$$

而 $\lim_{y\to x} g(y) = g(x)$, $g'(x)$ 不存在, 故由上面的等式即知 $f'(x)$ 不存在. 因此, f 仅在 $x=0$ 处可微.

31. 任给 G_δ 型的可数集 E, 可构造非减函数 f, 其导数满足条件: $f'(x)=\infty$ $(x\in E)$, $f'(x)=0$ $(x\overline{\in}E)$.

这个问题是由 Zahorski[177] 提出并由 Piranian[124] 解决的.

设 $E=\{x_n\}$ 是 G_δ 型的可数集, 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x),$$

其中 $f_n(x)$ 分别在 $x<x_n, x=x_n$ 和 $x>x_n$ 处取值为 $0, 1/2$ 和 1, 系数 c_n 待定. 据假设, $\{x_n\}=\cap_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 E_j 均为开集且 $E_j\supset E_{j+1}$. 对每一 j, 令 $\{E(j,k)\}$ 代表开集 E_j 的全体构成区间, 不失一般性, 可设 $E(j,k)$ 的长度小于 1.

对应于点 x_1, 我们选取标号对偶 (j_1,k_1), 使 $x_1\in E(j_1,k_1)$, 并用 d_1 代表 x_1 与 $E(j_1,k_1)^c$ 之间的距离, 且令 $c_1=2^{-1}d_1$. 设标号对偶 (j_m,k_m) $(m=1,2,\cdots,n-1)$ 已经确定. 我们选取对偶 (j_n,k_n) 不同于所有的对偶 (j_m,k_m) $(1\leqslant m<n)$, 使 $x_n\in E(j_n,k_n)$, 并记 $c_n=2^{-n}d_n$, 这里, d_n 代表 x_n 与 $E(j_n,k_n)^c$ 之间的距离. 因为每个 x_n 位于无穷多个区间 $E(j,k)$ 之中, 故这种程序可以毫不困难地继续施行.

令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x),$$

其中 $f_n(x)$ 分别在 $x<x_n$, $x=x_n$ 和 $x>x_n$ 处取值为 $0, 1/2$ 和 1. 显然, f 非减, 经直接计算可得 $f'(x)=\infty\,(x\in E)$.

另一方面, 若 $x\overline{\in}E=\cap_{j=1}^{\infty}E_j$, 则存在正数 M, 当 $n>M$ 时 $x\overline{\in}E_n$, 从而 $x\overline{\in}E(j_n,k_n)$. 设 $u\neq 0$, 显然,

$$0\leqslant \frac{f(x+u)-f(x)}{u}\leqslant |u|^{-1}\sum{}^{*} c_n,$$

这里, $\sum^*$ 是对这样的标号 n 求和, 使

$$x-|u|\leqslant x_n\leqslant x+|u|.$$

若 N 代表这种标号中最小的一个, 则当 $N\to\infty$ 时, $u\to 0$. 因为对任何 $N>M$, 和数 $\sum^* c_n$ 中的项 c_n 满足条件 $c_n=2^{-n}d_n\leqslant 2^{-n}|u|$, 故

$$0\leqslant \frac{f(x+u)-f(x)}{u}<2^{1-N},$$

从而 $f'(x)=0$.

32*. 无处存在单侧导数 (有限或无穷) 的连续函数.

下面的例子是由 Faber 作出的[70].

设 $\varphi(x)=\min\{x-[x], 1-x+[x]\}$, 则 φ 在 R^1 上连续. 作

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\varphi(2^{\nu!}x),$$

因为 $\varphi(2^{\nu!}x)$ 连续, 且级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\varphi(2^{\nu!}x)$ 在 R^1 上一致收敛, 所以 f 在 R^1 上是连续的.

现证 f 在 R^1 的任何点均无单侧导数. 为此, 任取一点 $x_0\in R^1$, n 是相当大的自然数, 分两种情形:

(i) $\varphi(2^{n!}x_0)\leqslant\frac{1}{4}$,

(ii) $\varphi(2^{n!}x_0)>\frac{1}{4}$.

取两点 x_{1n},x_{2n} 适合 $x_{2n}<x_0<x_{1n}$, 并且

对 (i) 的情形, $\varphi(2^{n!}x_{1n})=\varphi(2^{n!}x_{2n})=\frac{1}{2}$;

对 (ii) 的情形, $\varphi(2^{n!}x_{1n})=\varphi(2^{n!}x_{2n})=0$.

无论哪一种情形, 都要求 x_{1n}, x_{2n} 是满足上述性质而距 x_0 最近的点. x_0 在以 $[x_0]$, $[x_0]+1$ 为端点的闭区间中, 而考虑 $\varphi(2^{n!}x)$, 即将区间 $[[x_0],[x_0]+1]$ 分成 $2^{n!}$ 等分, 作在小区间端点取 0, 中点取 $\frac{1}{2}$ 的折线. 因之,

$$|x_0-x_{in}|<\frac{1}{2^{n!}}\quad(i=1,2),\tag{1}$$

$$|\varphi(2^{n!}x_0)-\varphi(2^{n!}x_{in})|\geqslant\frac{1}{4}.$$

显然,

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant|x-x'|,$$

$$|\varphi(2^{\nu!}x_0)-\varphi(2^{\nu!}x_{in})|\leqslant 2^{\nu!}|x_0-x_{in}|<\frac{2^{\nu!}}{2^{n!}}.$$

由这个不等式, 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{10^\nu}(\varphi(2^{\nu!}x_0)-\varphi(2^{\nu!}x_{in}))\right|&<\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{10^\nu}\cdot\frac{2^{\nu!}}{2^{n!}}\\&<\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\cdot\frac{2^{(n-1)!}}{2^{n!}}<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^n}\quad(n\geqslant5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}(\varphi(2^{\nu!}x_0)-\varphi(2^{\nu!}x_{in}))\right|&\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}(\varphi(2^{\nu!}x_0)+\varphi(2^{\nu!}x_{in}))\\&\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^n}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x_{in})|&\geqslant\frac{1}{10^n}|\varphi(2^{n!}x_0)-\varphi(2^{n!}x_{in})|-\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\right|-\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\right|\\&>\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{36}.\end{aligned}$$

再利用 (1), 推出

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x_{in})}{x_0-x_{in}}\right|>\frac{2^{n!}}{10^n}\cdot\frac{1}{36}.$$

由此可见, f 在 x_0 处不可微.

注意, 由以上 x_{1n}, x_{2n} 的选法可知, 差商

$$\frac{\varphi(2^{n!}x_0)-\varphi(2^{n!}x_{1n})}{x_0-x_{1n}},\quad \frac{\varphi(2^{n!}x_0)-\varphi(2^{n!}x_{2n})}{x_0-x_{2n}}$$

在 (i) 的时候, 分别是正、负号; 在 (ii) 的时候, 分别是负、正号. 而当 $n\geqslant 5$ 时,

$$\frac{f(x_0)-f(x_{in})}{x_0-x_{in}} \quad 与 \quad \frac{\varphi(2^{n!}x_0)-\varphi(2^{n!}x_{in})}{x_0-x_{in}}$$

同号, 由此可见, f 的差商没有固定的无穷极限. 也就是说, f 无处存在单侧导数.

注 Marcus [109] 构造了在任何一点都没有有限单侧导数的连续函数的初等例子.

Minassian 和 Gaisser [116] 构造了一个十分简单的无处存在单侧导数的连续函数的例子. 他们令 $f_1\equiv g_1$ 的图形是连接 $(0,0)$ 与 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 与 $(1,0)$ 的直线段的并. 然后令 f_2 的图形如下: 把 $[0,1]$ 等分为 10 分, 分别连接 $(0,0)$ 与 $(\frac{1}{10},\frac{1}{4}),(\frac{1}{10},\frac{1}{4})$ 与 $(\frac{1}{5},0),\cdots,(\frac{4}{5},0)$ 与 $(\frac{9}{10},\frac{1}{4}),(\frac{9}{10},\frac{1}{4})$ 与 $(1,0)$ 的直线段的并. 注意, f_2 的图形顶点的高度是 f_1 的图形顶点的高度的一半, 再令 $g_2=f_1+f_2$ (参看图 3).

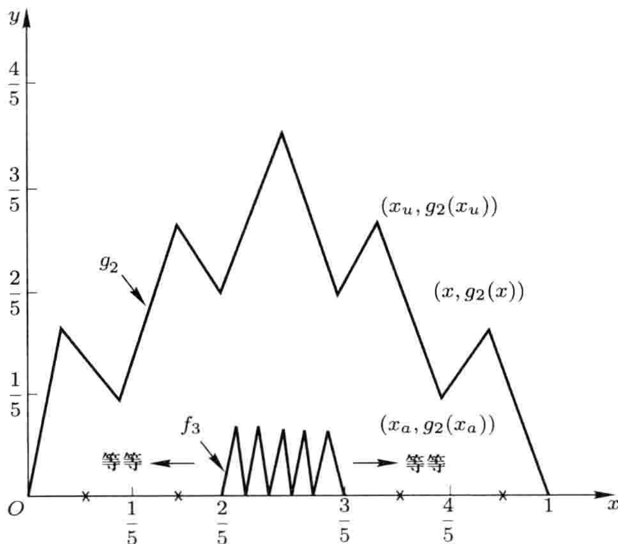


图 3

如此继续下去, 每个 f_i 的图像是把 f_{i-1} 的图像中的等腰三角形的底边 10 等分, 并作出 5 个全等的等腰三角形, 每个三角形的高度是相应于 f_{i-1} 的三角形的高度的一半, 然后令

$$g_i\equiv\sum_{j=1}^{i}f_j\equiv g_{i-1}+f_i,$$

则函数 $f\equiv\lim_{i\to\infty}g_i$ 具有所需的性质.

刘文 [1] 构造了一类具有奇特性质的连续函数, 无处存在有限单侧导数的连续函数以及不满足 α 阶 Hölder 条件的连续函数都是这类函数的一个特殊的情况.

33. $[0,1]$ **上的一个无穷可微函数** f**, 使** $\{x:f(x)=0\}$ **为不可数的疏集.**

下面的例子是由 Rehn 和 Kennedy [132] 作出的.

设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集, (a_n,b_n) $(n=1,2,\cdots)$ 为 E 的邻接区间. 令

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1}/(x-a_n)-1/(b_n-x), & x\in(a_n,b_n), n=1,2,\cdots, \\ 0, & x\in E, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的无穷可微函数, 且 $\{x:f(x)=0\}=E$ 为一不可数的疏集.

34. 函数 f**, 使** $f\in H^\alpha[a,b]$**, 而** $f\overline{\in}H^\beta[a,b], 0<\alpha<\beta$**.**

我们用 $H^\alpha[a,b]$ 代表定义在 $[a,b]$ 上的满足 α 阶 Hölder 条件的实值函数的全体. 令 $f(x)=x$, 则 $f\in H^\alpha[a,b]$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, 但 $f\overline{\in}H^\beta[a,b]$ $(\beta>1)$. 事实上, 假若 $f\in H^\beta[a,b]$, 即存在常数 M, 使对任何 $x,y\in[a,b]$, 都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\beta,$$

则

$$|f(x)-f(y)|/|x-y|\leqslant M|x-y|^{\beta-1},$$

从而 $f'(x)\equiv 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 因此, f 为一常值函数, 这与 f 的定义相矛盾.

注 容易证明, 若 $[a,b]$ 为一有限区间, 且 $\beta>\alpha>0$, 则 $H^\beta[a,b]\subset H^\alpha[a,b]$. 上述反例说明了这个包含关系是严格的.

35. 函数 f**, 使** $f\in H^1(-\infty,+\infty)$**, 而对任何** $\alpha\,(0<\alpha<1), f\overline{\in}H^\alpha(-\infty,+\infty)$.

设 $f(x)=x$, 则 $f\in H^1(-\infty,+\infty)$. 另一方面, 不存在常数 M, 使对一切 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|x-y|\leqslant M|x-y|^\alpha \quad (0<\alpha<1),$$

因此, $f\overline{\in}H^\alpha(-\infty,+\infty)$.

注 上述反例说明了当 (a,b) 为无穷区间时, 包含关系 $H^\beta(a,b)\subset H^\alpha(a,b)$ $(\beta>\alpha>0)$ 不再成立.

36*. 满足 α **阶 Hölder 条件的无处可微的连续函数.**

设

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi t),$$

此处 $0<b<1$, a 为一奇整数, 则当 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ 时, $\varphi(t)$ 在任一点 t 都不可微 (参看例 29). 因此, 函数

$$f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos a^n x$$

也是 R^1 上的一个无处可微的连续函数, 其中 $0<b<1$, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. 显然,

$$f(x+h)-f(x-h)=-\sum_{n=1}^{\infty}2b^n\sin a^n h\sin a^n x=-\left(\sum_{n=1}^{m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\right),$$

这里, m 是使 $a^n h\leqslant 1$ 能成立的最大的 n. 令

$$P=\sum_{n=1}^{m}2b^n\sin a^n h\sin a^n x,\quad Q=\sum_{n=m+1}^{\infty}2b^n\sin a^n h\sin a^n x,$$

我们注意, $0\leqslant\sin x\leqslant x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$, 所以 P 的每一项不超过 $2a^nb^nh$, 又 Q 的每一项不超过 $2b^n$, 因而得到

$$|P|\leqslant\sum_{n=1}^{m}2a^nb^nh=2abh\frac{a^mb^m-1}{ab-1}\leqslant Aa^mb^mh,$$

$$|Q|\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}2b^n=\frac{2b^{m+1}}{1-b}=Bb^m,$$

这里, A,B 代表与 m 无关的常数. 由 $a^mh\leqslant 1$, 得 $m\leqslant\lg\frac{1}{h}/\lg a$. 令 $a^mb^mh=h^\alpha$, 则

$$m=\frac{(\alpha-1)\lg h}{\lg ab}=\frac{(1-\alpha)\lg\dfrac{1}{h}}{\lg ab}\leqslant\frac{\lg\dfrac{1}{h}}{\lg a},$$

故 $\alpha\geqslant\lg\frac{1}{b}/\lg a$, 今取 $\alpha=\lg\frac{1}{b}/\lg a$, 则因 $0<b<1$, $ab>1$, 可见 $0<\alpha<1$, 此时 $Aa^mb^mh=O(h^\alpha)$, $Bb^m=O(h^\alpha)$, 从而

$$|f(x+h)-f(x-h)|=O(h^\alpha).$$

即 f 是一个满足 α 阶 Hölder 条件的无处可微的连续函数.

注意, 如果预先给定 α $(0<\alpha<1)$, 那么我们可以调节 a,b, 使满足 $0<b<1$, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 且 $\alpha=\lg\frac{1}{b}/\lg a$. 于是, 我们就得到了一个满足 α 阶 Hölder 条件而无处可微的连续函数.

这个例子是由 Hardy [85] 作出的.

37. 不满足任何阶 Hölder 条件的可微函数.

函数 $f(x)=e^x$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微. 易证, f 不满足任何阶 Hölder 条件. 事实上, 任取 $\alpha>0$ 及任意固定 $x_0>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{x_0}}{(x-x_0)^\alpha}=+\infty,$$

因此, 不存在常数 $M>0$, 使对一切 $x,x_0\in[0,+\infty)$, 都有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant M|x-x_0|^\alpha,$$

即 f 在 $[0,+\infty)$ 上不满足 α 阶 Hölder 条件.

38*. 处处可微而无处单调的函数.

我们要构造一个在 R^1 上处处可微的实值函数 H, 它在 R^1 的任何非空子区间上都不单调, 并且 H' 有界. 我们分七步进行.

I. 设 r, s 是实数.

(i) 若 $r > s > 0$, 则 $(r-s)/(r^2-s^2) < 2/r$.

(ii) 若 $r > 1$, $s > 1$, 则 $(r+s-2)/(r^2+s^2-2) < 2/s$.

证 (i) 是明显的. (ii) 等价于

$$(r-s)^2 + (r-1)(s-1) + r^2 + r + 3s > 5.$$

而这个式子当 $r > 1$, $s > 1$ 时也是明显的.

II. 设 $v(x) = (1+|x|)^{-\frac{1}{2}}$, $x \in R^1$. a, b 是相异实数, 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)dx < 4\min\{v(a), v(b)\}.$$

证 设 $a < b$. 当 $0 \leqslant a$ 时, 由第 I 步有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)dx = \frac{2(\sqrt{1+b}-\sqrt{1+a})}{(1+b)-(1+a)} < \frac{4}{\sqrt{1+b}} = 4\min\{v(a),\ v(b)\}.$$

因为 $v(-x) = v(x)$, 故 $b \leqslant 0$ 时不必特别考虑. 因而设 $a < 0 < b$, 此时由第 I 步得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)dx = \frac{2(\sqrt{1+b}+\sqrt{1-a}-2)}{(1+b)+(1-a)-2} < 4\min\{v(a), v(b)\}.$$

III. 若 v 如第 II 步, w 是形如

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j v[\lambda_j(x-\alpha_j)]$$

的任一函数, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是正实数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是任意实数, 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x)dx < 4\min\{w(a), w(b)\}.$$

证 这可由第 II 步及

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(\lambda(x-\alpha))dx = \frac{1}{\lambda(b-\alpha)-\lambda(a-\alpha)}\int_{\lambda(a-\alpha)}^{\lambda(b-\alpha)} v(t)dt$$

直接得到.

IV. 设 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是如第 III 步的函数的任一序列. 对 $x \in R^1$ 及每个 n 定义

$$W_n(x) = \int_0^x w_n(t)dt.$$

设对某个 $a \in R^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(a) = s < \infty$, 则级数

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)$$

在 R^1 的每个有界子集上一致收敛, 函数 F 在 a 处可微, $F'(a) = s$. 特别地, 若对所有 $t \in R^1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) = f(t) < \infty,$$

则 F 在 R^1 上处处可微, $F' = f$.

证 设 $b \in R^1$ 满足 $b \geqslant |a|$. 利用第 III 步, 当 $-b \leqslant x \leqslant b$ 时,

$$\begin{aligned}|W_n(x)| &\leqslant \left|\int_0^a w_n(t)dt\right| + \left|\int_a^x w_n(t)dt\right| \\ &\leqslant 4|a|w_n(a) + 4|x-a|w_n(a) \leqslant 12bw_n(a).\end{aligned}$$

于是, 从 Weierstrass M-判别法可得级数

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)$$

在 $[-b, b]$ 上的一致收敛性.

为证 $F'(a) = s$, 设 $\varepsilon > 0$ 为已知. 取 n_0 使

$$10 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} w_n(a) < \varepsilon.$$

由于每个 w_n 在 a 连续, 存在某个 $\delta > 0$, 使 $0 < |h| < \delta$, $1 \leqslant n \leqslant n_0$ 时

$$\left|\frac{1}{h}\int_a^{a+h} w_n(t)dt - w_n(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2n_0}.$$

因此, 再次利用第 III 步, 当 $0 < |h| < \delta$ 时

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - s\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{h}\int_a^{a+h} w_n(t)dt - w_n(a)\right]\right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0}\left|\frac{1}{h}\int_a^{a+h} w_n(t)dt - w_n(a)\right| \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left[\frac{1}{h}\int_a^{a+h} w_n(t)dt + w_n(a)\right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 5w_n(a) < \varepsilon.\end{aligned}$$

V. 设 $I_1, \cdots, I_n$ 是不相交的开区间, α_j 是 I_j 的中点, ε 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是正实数. 则存在如第 III 步的函数 w, 使对每个 j,

(i) $w(\alpha_j) > y_j$;

(ii) 若 $x \in I_j$, 则 $w(x) < y_j + \varepsilon$;

(iii) 若 $x \overline{\in} I_1 U \cdots U I_n$, 则 $w(x) < \varepsilon$.

证 取 $c_j = y_j + \frac{\varepsilon}{2}$, 定义 $v_j(x)$ 为 $v_j(x) = c_j v(\lambda_j(x - \alpha_j))$, 其中 λ_j 选得如此之大, 使 $x \overline{\in} I_j$ 时 $v_j(x) < \varepsilon/(2n)$ (只需要对 I_j 的一个端点检查这个不等式). 取

$$w = v_1 + \cdots + v_n.$$

因为 $I_1, \cdots, I_n$ 不相交, 并且 v_j 在 α_j 取得它的最大值 c_j, 故性质 (i), (ii), (iii) 是显然的.

VI. 设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 R^1 的不相交可数子集, 则存在 R^1 上处处可微的实值函数 F, 对所有 j 满足 $F'(\alpha_j) = 1$, $F'(\beta_j) < 1$, 对所有 x 满足 $0 < F'(x) \leqslant 1$.

证 我们先构造 $F' = f = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 如第 IV 步那样得到 F, 或者更严格地说, 先构造部分和 $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$, 使之满足

$$f_n(\alpha_j) > 1 - \frac{1}{n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad (A_n)$$

$$f_n(x) < 1 - \frac{1}{n+1}, \quad x \in R^1, \qquad (B_n)$$

$$w_n(\beta_j) < \frac{1}{2n \cdot 2^n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \qquad (C_n)$$

如果这样做了, 便有

$$F'(\alpha_j) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_j) = 1, \quad 0 < F'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant 1,$$

同时, 取 $n > j$, 则

$$F'(\beta_j) = f_{n-1}(\beta_j) + \sum_{k=n}^{\infty} w_k(\beta_j) < 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot 2^k}$$

$$< 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2n} < 1.$$

这样, 我们得到了所要求的 F.

我们归纳地构造 f_n, w_n. 先取开区间 I_1, 它以 α_1 为中点, 而 $\beta_1 \overline{\in} I_1$. 应用第 V 步 (取 $\varepsilon = y_1 = 1/4$) 得 $f_1 = w_1$, 它满足条件 $(A_1), (B_1), (C_1)$.

设 $n > 1$, 并且, 满足 $(A_{n-1}), (B_{n-1}), (C_{n-1})$ 的 f_{n-1}, w_{n-1} 已经取得. 取不相交的开区间 $I_1, \cdots, I_n$, 使对 $j \in \{1, \cdots, n\}$, α_j 是 I_j 的中点, $I_j \cap \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} = \varnothing$,

$$f_{n-1}(x) < f_{n-1}(\alpha_j) + \delta, \quad x \in I_j,$$

其中

$$\delta = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n \cdot 2^n} > 0.$$

现在, 应用第 V 步 (取 $\varepsilon = 1/(2n \cdot 2^n)$, $y_j = 1 - 1/n - f_{n-1}(\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$) 得到 w_n. (C_n) 显然是满足的. 又, $1 \leqslant j \leqslant n$ 时

$$f_n(\alpha_j) = f_{n-1}(\alpha_j) + w_n(\alpha_j) > f_{n-1}(\alpha_j) + y_j = 1 - \frac{1}{n},$$

从而满足 (A_n). 为检查 (B_n) 是否满足, 注意: 若 $x \in I_j$, 则

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + w_n(x) < f_{n-1}(\alpha_j) + \delta + y_j + \varepsilon$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

而 $x \overline{\in} \cup_{j=1}^{n} I_j$ 时,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + w_n(x) < 1 - \frac{1}{n} + \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

VII. 设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 R^1 的不相交的稠密子集. 应用第 VI 步得到 R^1 上的处处可微函数 F 与 G, 使对所有 j 与 x,

$$F'(\alpha_j) = G'(\beta_j) = 1, \quad G'(\alpha_j) < 1, \quad F'(\beta_j) < 1,$$

$$0 < F'(x) \leqslant 1, \quad 0 < G'(x) \leqslant 1.$$

令

$$H = F - G,$$

则对所有 j, x,

$$H'(\alpha_j) > 0, \quad H'(\beta_j) < 0, \quad -1 < H'(x) < 1.$$

因为 $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ 都稠密于 R^1, 故 H 不可能在区间上单调.

上述构造法属于 Katznelson 和 Stromberg [96].

注 我们用 $D[a,b]$ 代表定义在 $[a,b]$ 上且具有有界导函数的全体函数 ($f'(a) = f'(a+), f'(b) = f'(b-)$). 对 $f \in D[a,b]$, 令

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| + \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

再令 $D_0[a,b] = \{f \in D[a,b] : f$ 无处单调$\}$. 由例 38 即知, $D_0[a,b]$ 非空. Tibor Šalàt [166] 指出, $D_0[a,b]$ 在 $D[a,b]$ 中无处稠密.

39. 在每个非空区间上都能取得局部极大值和局部极小值的可微函数.

设 H 是例 38 中的可微函数. 兹证 H 在 R^1 的任何非空区间内都能取得局部极大值和局部极小值. 事实上, 对任意非空区间 (a,b), 可在 (a,b) 内选取实数 α, β. 使 $\alpha < \beta$ 且 $H'(\alpha) > 0$, $H'(\beta) < 0$. 于是, H 在 (α, β) 的某点 r 取得局部极大值, 即 H 在 (a,b) 内能取得局部极大值. 同理可证, H 在 (a,b) 内也能取得局部极小值.

此例是由 Katznelson 和 Stromberg [96] 作出的.

40. 满足 Lipschitz 条件而无处单调的函数.

设 f 是 $[a,b]$ 上的函数 F 的有界导函数, 使得 $\{x : f(x) > 0\}$ 和 $\{x : f(x) < 0\}$ 在 $[a,b]$ 内都稠密. 这种函数 F 是存在的 (参看 [66]).

由于 $F' = f$ 在 $[a,b]$ 上有界, 故 F 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件. 又由于集 $\{x : F'(x) > 0\}$ 和 $\{x : F'(x) < 0\}$ 在 $[a,b]$ 中都稠密, 故 F 在 $[a,b]$ 上无处单调.

第四章

Riemann 积分

---

0. 引言.

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 若极限

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$) 存在, 则称此极限为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分, 简称 (R) 积分,记作

$$\int_a^b f(x)dx.$$

若 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分存在, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 简称 (R) 可积或可积.

$[a,b]$ 上的连续函数及单调有界函数在 $[a,b]$ 上都是 (R) 可积的.

我们称 $A\subset R^1$ 为零测度集, 如果 A 能够含于有限个或可数个开区间之内, 而这些开区间的总长度 (即各开区间长度的和数) 可以任意小. 由这个定义立即推知, R^1 中的任何有限集或可数集都是零测度集.

设有一个关于集 E 上的点 x 的命题 $\pi(x)$, 如果有 E 的零测度子集 N, 使 $\pi(x)$ 在 $E\backslash N$ 上恒成立, 则我们就说 $\pi(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

Lebesgue 定理 定义域为闭区间 $[a,b]$ 的函数 f 是 (R) 可积的充要条件为 f 在 $[a,b]$ 上有界并且几乎处处连续.

若函数 f 于每一有限区间 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

若函数 f 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a,b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 上是 (R) 可积的, 则取

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2}$$

若极限 (1) 或 (2) 存在, 则对应的积分称为收敛的, 也称 f 在 $[a,+\infty)$ 或 $[a,b]$ 上是 (广义) (R) 可积的. 在相反的情形, 则称对应的积分为发散的, 也称 f 在 $[a,+\infty)$ 或 $[a,b]$ 上不是广义 (R) 可积的.

若 $|f|$ 是广义 (R) 可积的, 则称函数 f 的对应积分 (1) 或 (2) 为绝对收敛的. 收敛而不绝对收敛的广义积分称为: 条件收敛的.

若 f 在每一有限区间 $[-A,A]$ $(A>0)$ 上 (R) 可积, 且极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$$

存在, 则称此极限为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上积分的 Cauchy 主值, 记为

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

同样, 对于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 而 c 是唯一奇点 (即 f 在点 c 的邻近无界) 的情形, 定义

$$\text{V.P.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上均有定义, 且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 若极限

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta g(x_i)$$

(式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)$) 存在, 则称此极限为函数 f 对函数 g 的 Riemann-Stieltjes 积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

关于上述各种积分的基本性质可参看 [7], [28] 和 [98].

1. 函数 f, 使 $|f|$ (R) 可积而 f 不 (R) 可积.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ -1, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 $|f(x)|\equiv 1$, 故 $|f|$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积. 由于 f 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而它在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积.

注 若 f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也 (R) 可积, 且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

(参看 [7], p.374). 上述反例说明了这个陈述反过来是不成立的.

2. 没有原函数的 (R) 可积函数.

假如有可以微分的函数 φ 适合 $\varphi'(x)=f(x)$, 则称 f 具有原函数 φ.

现在我们给出一个没有原函数的 (R) 可积函数. 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

易见, f 在 $[-1,1]$ 上 (R) 可积. 然而, f 在 $[-1,1]$ 上没有原函数. 事实上, 如果 f 在 $[-1,1]$ 上有原函数 φ, 即

$$\varphi'(x)=f(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

那么, 由 Darboux 定理可知, φ' 应取得 $\varphi'(-1)=0$ 与 $\varphi'(1)=1$ 之间的每一个值, 即 f 应取得 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 之间的每一个值, 此与 f 的定义相矛盾. 因此, f 在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

顺便指出, 由 Darboux 定理可知, 任何有跳跃间断点的函数都不可能有原函数.

3. 在任何区间上都没有原函数的 (R) 可积函数.

设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为区间 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则函数 f 在 $[0,1]$ 上严格递增, 且 f 在 $[0,1]$ 中的任一有理点间断而在任一无理点连续. 又, f 在点 r_n 处的跃度恰好等于 $1/2^n$, 即

$$\lim_{x\to r_n+}f(x)-\lim_{x\to r_n-}f(x)=\frac{1}{2^n}$$

(参看第二章例 35). 因为 f 在 $[0,1]$ 上单调, 所以它在 $[0,1]$ 上 (R) 可积. 但是, 由于 f 的跳跃间断点的集合在 $[0,1]$ 中稠密, 因而 f 在 $[0,1]$ 的任何非空子区间上都不可能有原函数.

4. 在闭区间上有原函数但不 (R) 可积的函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 f 在闭区间 $[-1,1]$ 上每一点 x 处都有有限导数

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

因此, 函数 g 有原函数 f. 但是, 由于 g 在区间 $[-1,1]$ 上无界, 因而它在 $[-1,1]$ 上不 (R) 可积.

注 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续, 那么在 $[a,b]$ 上必将存在一个函数 φ, 使得 $\varphi'(x)=f(x)$, 即 f 在 $[a,b]$ 上具有原函数. 因此, f 在 $[a,b]$ 上的连续性是 f 有原函数的充分条件. 上述反例说明了为使函数具有原函数, 其连续性并不是必要条件.

5. 以任意零测度的 F_σ 集作为间断点集的 (R) 可积函数.

设 A 是一个给定的零测度的 F_σ 集, $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$, 其中 A_n 是区间 $[a,b]$ 的闭子集, 且不妨设 $A_n\subset A_{n+1}$, $n=1,2,\cdots$ (参看第二章例 38). 设 A_0 表示空集 $\varnothing$, 现在定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}2^{-n}, & x\in A_n\backslash A_{n-1},\\ 0, & x\overline{\in}A.\end{cases}$$

可以证明, f 在 A 上无处连续而在 $[a,b]\backslash A$ 上连续.

事实上, 任取 $x_0\in A$, 若 $x_0\in A_n\backslash A_{n-1}$, 则 $f(x_0)=2^{-n}$. 由于 $A_n\backslash A_{n-1}$ 是一个零测度集, 因而它不含有内点, 所以 x_0 必是某个与 A_n 不相交的集的聚点. 在这个集上, f 的值与 $f(x_0)=2^{-n}$ 至少相差 2^{-n-1}, 这意味着 f 在 x_0 间断. 现任取 $x_0\in[a,b]\backslash A$, 则 $f(x_0)=0$. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 我们选一个正整数 N 使 $2^{-N}<\varepsilon$, 然后再找 x_0 的一个邻域使其内部没有 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 的点, 于是, 当 x 属于 x_0 的这个邻域内时, 就有

$$|f(x)-f(x_0)|=f(x)<2^{-N}<\varepsilon,$$

这就是说, f 在 x_0 连续.

由于 f 在 $[a,b]$ 上的间断点集 A 是零测度集, 因而 f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积.

6. 与 (R) 可积函数对等但本身并不 (R) 可积的函数.

设 $f(x)\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 并在 $[0,1]$ 上定义函数 g:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理点},\\ 0, & x\text{ 为无理点}.\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上, 函数 g 显然对等于 (R) 可积函数 f, 即, g 与 f 在 $[0,1]$ 上几乎处处相等. 但 g 在 $[0,1]$ 上无处连续, 因而它在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积.

注 容易证明, 凡是与 (L) 可积函数对等的函数必定 (L) 可积. 上述反例说明了 (R) 积分无此性质.

7. 一个 (R) 可积函数, 在某个可数集上任意改变它的值 (但这些数值全体要组成有界集合), 而不影响它的可积性.

设 e 是由 0 和点 $x_k=1/k\pi$ $(k=1,2,\cdots)$ 组成的 $[0,1]$ 的一个可数子集, 在

$[0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right), & x\overline{\in}e,\\ 0, & x\in e.\end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积. 如果在 e 上赋予 f 以任何数值, 但这些数值全体要组成有界集合, 那么得到的函数在 $[0,1]$ 上仍有界且几乎处处连续, 因而它在 $[0,1]$ 上仍 (R) 可积.

注 容易证明, 对于一个 (R) 可积函数变动它的有限个点的值, 可积性不变, 积分值也不变. 如果变动了它的可数个点的值, 那么可积性可能会遭到破坏 (参看例 6). 另一方面, 例 7 说明了也确实存在这样的 (R) 可积函数, 在某个可数集上任意变动它的值 (要求这些数值全体组成有界集合), 而不影响它的可积性.

8. 复合函数是否 (R) 可积的各种实例.

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 且其值域不越出区间 $[c,d]$, 而 $g(y)$ 是定义在 $[c,d]$ 上的函数. 下面我们举出各种例子, 以说明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$, $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上的 (R) 可积性对于 $g[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上的 (R) 可积性来说既非充分的也非必要的.

(a) 设 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}1/n, & x \text{ 为非零有理数且表为既约分数 } m/n,\\ 0, & x \text{ 为无理数或零},\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积. 再设

$$g(y)=\begin{cases}1, & 0<y\leqslant 1,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

显然, $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积. 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上无处连续, 故它在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积.

(b) 设 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}1/n, & x \text{ 为非零有理数且表为既约分数 } m/n,\\ 0, & x \text{ 为无理数或零}.\end{cases}$$

再设 $g(y)$ 定义于 $[0,1]$, 且

$$g(y)=\begin{cases}0, & y \text{ 为有理数},\\ 1, & y \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 而 $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积, 复合函数

$$g[f(x)]\equiv 0$$

在 $[0,1]$ 上显然 (R) 可积.

(c) 设在 $[0,1]$ 上, $f(x)=1-x$, 而在 $[0,1]$ 上,

$$g(y)=\begin{cases}1, & y\ \text{为无理数},\\ 0, & y\ \text{为有理数}.\end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积, 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x\ \text{为无理数},\\ 0, & x\ \text{为有理数}.\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上显然不 (R) 可积.

(d) 设在 $[0,1]$ 上, $f(x)$ 为:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数},\end{cases}$$

它显然不 (R) 可积, 而在 $[0,1]$ 上 $g(y)$ 为:

$$g(y)=\begin{cases}1/n, & y\ \text{为非零有理数且表为既约分数}\ m/n,\\ 0, & y\ \text{为无理数或零}.\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1/n, & x\ \text{为非零有理数且表为既约分数}\ m/n,\\ 0, & x\ \text{为无理数或零}.\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上 (R) 可积.

(e) 设 $f(x)$ 如 (d), 而在 $[0,1]$ 上 $g(y)=y^2$, 此时复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积.

(f) 设在 $[0,1]$ 上, $f(x)$ 为:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为无理数},\\ 0, & x\ \text{为有理数},\end{cases}$$

而在 $[0,1]$ 上, $g(y)$ 为:

$$g(y)=\begin{cases}1, & y\ \text{为无理数},\\ 0, & y\ \text{为有理数},\end{cases}$$

它们在 $[0,1]$ 上均不 (R) 可积, 而复合函数

$$g[f(x)]\equiv 0$$

在 $[0,1]$ 上 (R) 可积.

(g) 设在 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 为:

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\ \text{为无理数},\\ x, & x\ \text{为有理数},\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上为不 (R) 可积. 再设在 $[2,3]$ 上 $g(y)$ 为

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为无理数}, \\ 0, & y \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

于是, 复合函数在 $[0,1]$ 上:

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数}, \\ 0, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

$g(y)$ 与 $g[f(x)]$ 均不 (R) 可积.

至于 $f(x)$ 和 $g(y)$ 均 (R) 可积时, $g[f(x)]$ 为 (R) 可积的例子是平凡的, 如取 $f(x)$ 及 $g(y)$ 均连续即可.

综上所述, 有下表:

	$f(x)$ 在 $[a,b]$	$g(y)$ 在 $[c,d]$	$g[f(x)]$ 在 $[a,b]$	例
1	可积	可积	可积	平凡
2	可积	可积	不可积	(a)
3	可积	不可积	可积	(b)
4	可积	不可积	不可积	(c)
5	不可积	可积	可积	(d)
6	不可积	可积	不可积	(e)
7	不可积	不可积	可积	(f)
8	不可积	不可积	不可积	(g)

9. 两个函数 f 与 g, 使 f^2 与 g^2 皆 (R) 可积而 $(f+g)^2$ 并不 (R) 可积.

在 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数}, \\ -1, & x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为代数数}, \\ -1, & x \text{ 为超越数}.\end{cases}$$

于是, $f^2(x)\equiv 1$. $g^2(x)\equiv 1$, 所以它们在 $[0,1]$ 上都是 (R) 可积的. 但是,

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2, & x \text{ 既为代数数又为无理数}, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因此, $(f+g)^2$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而它在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积.

注 我们有下述问题: 如果函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'^2+g'^2$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 那么 f' 和 g' 在 $[a,b]$ 上是否必定 (R) 可积? 这个问题的答案是否定的. Rennie[133] 构造了两个函数 f 与 g, 使在任意有限区间 $[a,b]$ 上, f' 与 g' 均存在而且有限, 又, $f'^2+g'^2$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 但 f' 与 g' 在 $[a,b]$ 上均不 (R) 可积.

10. 一个有界函数序列的极限, 它在任何非空区间上都不 (R) 可积.

设

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2\pi x\cos^{2n}\pi x,\quad G(x)=\lim_{n\to\infty}g(n!x),$$

则当 x 是整数时, $g(x)=0$; 而当 x 不是整数时, $g(x)=1$. 因此, 若 x 是有理数, 则 $G(x)=0$; 若 x 是无理数, 则 $G(x)=1$. 可见 $G(x)$ 在任何非空区间上都不 (R) 可积.

这个问题是由 Steinitz 提出并由 Pólya 解答的. 参看 *Arch. Math. Phys.* Ser3, vol.19 (1912), p.361 和 vol.21 (1913), p.290.

11. 一个 (R) 可积函数序列, 其上确界函数并不 (R) 可积.

设 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 在 $[0,1]$ 上如下定义函数序列:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_k\}_{k=1}^{n},\\ 0, & x\,\overline{\in}\,\{r_k\}_{k=1}^{n}.\end{cases}$$

于是, 对每一正整数 n, f_n 在 $[0,1]$ 上只有 n 个间断点, 所以 f_n 在 $[0,1]$ 上是 (R) 可积的. 但是, 上确界函数

$$f(x)=\sup_n f_n(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上无处连续, 因而不 (R) 可积.

注 若有限个函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $[a,b]$ 上都 (R) 可积, 则它们在 $[a,b]$ 上都几乎处处连续, 从而其最大值函数

$$f(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}f_k(x)$$

在 $[a,b]$ 上也几乎处处连续 (参看 [8], pp.112—113). 因此, f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积. 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个函数的情形.

12. 积分的极限不等于极限的积分的函数序列.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数序列:

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x\leqslant 1/n,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } 1/n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

易见, 对每一正整数 n, f_n 在 $[0,1]$ 上都是 (R) 可积的, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1.$$

但是

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

更为极端的例子是

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^3x, & 0\leqslant x\leqslant 1/(2n),\\ n^2-2n^3\left(x-\dfrac{1}{2n}\right), & 1/(2n)\leqslant x\leqslant 1/n,\\ 0, & 1/n\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

在这种情况下, 对于任何 $b\in(0,1]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty,$$

而

$$\int_0^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_0^b 0dx=0.$$

13. 一个 (R) 可积函数 f, 使 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 处处可微, 但在一个稠密集上, $g'(x)\neq f(x)$.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q, p \text{ 与 } q \text{ 是互质的整数且 } q>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 且

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt\equiv 0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

所以对任意 $x\in[0,1]$, 都有 $g'(x)=0$. 由此可见, 在 $[0,1]$ 中的每个有理点上, $g'(x)\neq f(x)$.

14. 一个 (R) 可积函数 f, 使 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 不处处可微.

设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$, 则 f 仅在 $x=0$ 处不连续, 所以它在任何有限区间上都是 (R) 可积的. 又

$$g(x)=\int_0^x \operatorname{sgn} t dt=|x|,$$

故 g 在 $x=0$ 处不可微.

注 我们有如下的命题: 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 而

$$g(x)=C+\int_0^x f(t)dt$$

为 f 的不定积分, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续且在 f 连续的一切点处等式

$$g'(x)=f(x)$$

成立 (参看 [7], pp.379—380). 例 13 和例 14 说明了在函数 f 的间断点处, g 可能可微也可能不可微.

15. 函数 f 和 g, 使得 f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, g 在 $[a,b]$ 上不变号且 (R) 可积, 而在 (a,b) 中不存在满足等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 的 ξ.

设 $g(x) \equiv 1$, 又设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ -1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} g(x)dx = 2.$$

于是由函数 f 的定义可知, 不存在 $\xi \in (-1,1)$ 使

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

注 我们有如下的积分第一中值定理 (参看 [7], pp.376—377): 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 而在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则在 (a,b) 中存在一点 ξ, 使

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{a}^{b} g(x)dx.$$

上述反例说明了不能把积分第一中值定理中 f 在 $[a,b]$ 上的连续性减弱为 (R) 可积性.

16. 函数 f 和 g, 使 $\int_a^c f(x)dg(x)$ 和 $\int_c^b f(x)dg(x)$ 均存在, 而 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 不存在 $(a < c < b)$.

在区间 $[-1,1]$ 上如下定义函数 f 和 g:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

则 $\int_{-1}^0 f(x)dg(x)$ 和 $\int_0^1 f(x)dg(x)$ 均存在, 其值均为 0. 但是, 积分

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$$

并不存在, 这是因为 f 和 g 在 $x=0$ 有共同的间断点 (参看 [98], pp.186—187).

积分 $\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$ 的不存在性也可由 Riemann-Stieltjes 积分的定义直接验证. 事实上, 如果 $[-1,1]$ 的分法不取 0 为分点的话, 那么必有 i, 使得 $x_i < 0 < x_{i+1}$. 于是

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

中只有第 i 项等于 $f(\xi_i)$, 而其余各项均为 0 (因 x_k, x_{k+1} 都在 0 的一边). 所以

$$\sigma = f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = f(\xi_i).$$

由 $\xi_i \leqslant 0$ 或 $\xi_i > 0$ 而得

$$\sigma = 0 \quad 或 \quad \sigma = 1,$$

由是, σ 的极限不存在.

注 对于 (R) 积分, 我们有如下的命题 (参看 [7], p.375): 若 $a<c<b$, f 在 $[a,c],[c,b]$ 上 (R) 可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上也 (R) 可积, 并成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

上述反例表明, 对于 Riemann-Stieltjes 积分而言, 相应的命题并不成立.

17. 函数 f 和 g, 使 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 存在, 但改变 f 在某个点的值, $\int_a^b f(x)dg(x)$ 就不存在.

在区间 $[-1,1]$ 上定义函数 f 和 g:

$$f(x)\equiv 1,\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

易见, $\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$ 存在且等于 0. 现改变 f 在 $x=0$ 的值为 2:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$$

则因 f 和 g 在 $x=0$ 处有共同的间断点, 从而

$$\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$$

不存在.

注 对 Riemann 积分而言, 改变被积函数在有限个点处的值既不影响它的积分的存在性, 也不影响其积分值. 上述反例说明了 Riemann-Stieltjes 积分的值可以因变动函数在一个点的值而改变, 这种积分的存在性也可能受这种变动的影响.

18. $(0,1)$ 上的一个无界函数, 其广义 (R) 积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不是对应的积分和式 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

我们考察定义在 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=|\ln x|$, 它在 $(0,1)$ 上的广义 (R) 积分存在, 因为

$$\int_0^1 |\ln x|dx=-\int_0^1 \ln x dx=-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx=1.$$

然而, 若将 $(0,1)$ 分成长度相等的 n 个子区间:

$$\Delta x_i=1/n\quad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

并取 $\xi_0'=e^{-n}$, $x_i\leqslant \xi_i'\leqslant x_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, 则显然有 $0<\xi_0'<1/n$.

再取 $\xi_0''=e^{-2n}$, 以及 $x_i\leqslant \xi_i''\leqslant x_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, 同样有 $0<\xi_0''<1/n$.

如果 $\int_0^1|\ln x|dx$ 是和式 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限, 则应有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i'')\Delta x_i.$$

然而, 上述等式两端的和式中有一项相异:

$$f(\xi_0')\Delta x_0 = \frac{1}{n}|\ln e^{-n}| = 1, \quad f(\xi_0'')\Delta x_0 = \frac{1}{n}|\ln e^{-2n}| = 2.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\Delta x_i \neq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i'')\Delta x_i.$$

由此可知, 广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不能是对应的积分和式 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

19. $(0,1)$ **内的一个单调函数** f, **使** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ **存在而** f **并不广义** (R) **可积.**

在区间 $(0,1)$ 上定义函数

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x},$$

则

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} < 0,$$

故 f 在 $(0,1)$ 内是递减的, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-2k}{k(n-k)} = 0.$$

然而, f 在 $(0,1)$ 上并不广义 (R) 可积.

注 假若函数 f 在区间 $(0,1)$ 内单调, 它在点 $x=0, x=1$ 的附近不必有界, 那么由广义 (R) 积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在可推知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

也存在, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

(参看 [126], 中译本 pp.53—54). 上述反例说明了它的逆命题并不成立. 又, 如果 f 在区间 $(0,1)$ 内单调, 在 $x=0$ 或 $x=1$ 为有限, 并且下列极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

也为有限, 那么广义 (R) 积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 必定存在 (参看 [126], 中译本 p.54). 因此, 上述反例也说明了在这个命题中, f 在 $x=0$ 或 $x=1$ 为有限的条件是不能去掉的.

20. 收敛而不绝对收敛的广义积分.

收敛而不绝对收敛的广义积分的典型例子是

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

要证明 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 对于任意的 $s > \pi$, 我们有 (利用分部积分法)

$$\int_{\pi}^{s} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos s}{s} - \int_{\pi}^{s} \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{1}$$

由于

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad (\pi \leqslant x < +\infty),$$

而广义积分 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (绝对) 收敛, 由此推得 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ 绝对收敛因而收敛. 因此当 $s \to +\infty$ 时, (1) 式右端各项均趋向有限极限, 所以

$$\lim_{s \to +\infty} \int_{\pi}^{s} \frac{\sin x}{x} dx$$

存在, 这就证明了 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

兹证 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不绝对收敛, 对于任意的正整数 N, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\pi} |\sin(u + n\pi)| du.
\end{aligned}$$

现在

$$\sin(u + n\pi) = \sin u \cos n\pi + \cos u \sin n\pi = \sin u \cos n\pi.$$

由于 $\cos n\pi = \pm 1$, 这说明 $|\sin(u + n\pi)| = |\sin u|$. 因此, 若 $0 \leqslant u \leqslant \pi$, 则 $|\sin(u + n\pi)| = \sin u$. 所以

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\pi} \sin u du \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}.
\end{aligned} \tag{2}$$

因为级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 所以只要把 N 取得足够大, 就可以使 (2) 式右端的值要多大就有多大. 这一结果结合 (2) 式, 就证明了

$$\lim_{s \to +\infty} \int_{\pi}^{s} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

不可能存在, 因而 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不绝对收敛.

21. 函数 f 和 g, 使 f 广义 (R) 可积而 g 有界, 但 fg 并不广义 (R) 可积.

设 $f(x) = \sin x / x, g(x) = \sin x$, 则 f 在区间 $[\pi, +\infty)$ 上是广义 (R) 可积的, 即广义积分

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛 (参看例 20). 但是, 广义积分

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散. 事实上,

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

而对任意的 $s > \pi$, 有

$$\left| \int_{\pi}^{s} \cos 2x dx \right| = \frac{1}{2} |\sin 2s - \sin 2\pi| \leqslant 1/2,$$

又当 $x \to +\infty$ 时, $1/(2x)$ 单调趋于零, 因而由 Dirichlet 判别法 (参看 [7], pp.679—680), 广义积分 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 收敛. 另外, $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ 发散, 所以 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散.

注 容易证明, 如果广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, 函数 g 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 那么广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 也绝对收敛. 上述反例说明了在这个命题中, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛的条件不能减弱为收敛.

22. $[0, +\infty)$ **上的一个函数, 它在** $[0, +\infty)$ **的任何有限子区间上取正值、有界、可积, 并且积分** $\int_0^{+\infty} (f(x))^\alpha dx$ **当** $\alpha = 1$ **时收敛, 而当** α **为不等于 1 的实数时发散.**

设 $\{a_n\}$ 是一个正数序列, $a_n < 1/2$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta$ 对 $\beta < 1$ 发散. 例如, 可取

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

对 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 作函数

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & n - 1 \leqslant x < n - a_n^2, \\ 1/a_n, & n - a_n^2 \leqslant x < n, \end{cases}$$

这里 a_1 是任一小于 1/2 的正数. 注意到

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx < 2a_n, \quad \int_{n-1}^{n} (f(x))^\alpha dx > \frac{1}{2} a_n^\alpha + a_n^{2-\alpha},$$

可见函数 f 具有所需的性质.

23. 函数 f, **使** $|f|$ **广义** (R) **可积而** f^2 **并不广义** (R) **可积.**

第一例 设 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ $(0 < x \leqslant 1)$, 则

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

但 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散.

第二例 在 $[1, +\infty)$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^4}, \\ 0, & n + \dfrac{1}{n^4} \leqslant x < n + 1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

显然,

$$\int_1^{N+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{N} n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2},$$

当 $N \to +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因而广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 但是

$$\int_1^{N+1} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{N} n^4 \cdot \frac{1}{n^4} = N,$$

所以

$$\lim_{N\to+\infty} \int_1^{N+1} f^2(x)dx = +\infty,$$

即广义积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 发散.

注 容易证明, 若 f, g 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则 fg 在 $[a,b]$ 上也 (R) 可积, 上述反例说明了对于广义 (R) 积分而言, 相应的命题并不成立.

24. $[1,+\infty)$ **上的一个函数** f**, 使** f^2 **广义** (R) **可积而** $|f|$ **并不广义** (R) **可积.**

设 $f(x) = 1/x^{\frac{3}{4}}$, $1 \leqslant x < +\infty$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{4}})^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = 2.$$

但广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} dx$ 发散.

注 例 23 中的第二例和例 24 说明了对于无穷限广义积分, 平方可积性和绝对可积性互不相关.

对于有限区间上的无界函数的广义积分, 平方可积的函数一定是绝对可积的, 这可由不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

得到. 例 23 中的第一例说明了它的逆命题并不成立.

25. **在** $[1,+\infty)$ **上广义** (R) **可积的正值连续函数** f**, 使** $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

在各整数 $n > 1$, 令 $g(n) = 1$, 在闭区间 $[n - n^{-2}, n]$ 和 $[n, n + n^{-2}]$ 的内部, 定义 g 是线性的, 而在区间的非整数端点, g 取 0. 最后, 在 $x \geqslant 1$ 而 $g(x)$ 尚未定义的点, 规定 $g(x)$ 的值为 0. 于是, 函数

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

当 $x \geqslant 1$ 时是正值连续函数, 且

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} g(x)dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1 < +\infty,$$

即 f 在 $[1,+\infty)$ 上是广义 (R) 可积的. 但是, 等式

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

并不成立.

注 可以证明, 如果 f 为 $[a,+\infty)$ 上的一致连续函数, 并且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 那么

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

上述反例说明了在这个命题中, 函数的一致连续性不能代以正值连续性.

26. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而在每个区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上 $f(x)$ 是无界、非负连续函数

作函数 f : 当 $x=n\ (n>1)$ 时, $f(x)=n$; 在闭区间 $[n-n^{-3},n]$ 和 $[n,n+n^{-3}]$ 的内部, 定义 f 是线性的; 而在区间 $[n-n^{-3},n]$ 和 $[n,n+n^{-3}]$ 的非整数端点, f 取 0. 最后, 在 $x>0$ 而 $f(x)$ 尚未定义的点, 规定 $f(x)$ 的值为 0. 于是, f 为 $(0,+\infty)$ 上的非负连续函数. 又

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty} n^{-3}\cdot n=\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2}<+\infty,$$

即 f 在 $(0,+\infty)$ 上广义 (R) 可积. 然而, 对于任意实数 $a>0$, f 在 $[a,+\infty)$ 上无界.

27. 一个有理函数 R, 使对任何在 $(-\infty,+\infty)$ 上广义 (R) 可积函数 f, 都有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f[R(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

这个问题是由 Pólya 提出并由 Szegö 解答的. 细节可参看 *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* vol.40 (1931), p.81 及 vol.43 (1934), pp.17—24.

28. Cauchy 主值为有限的发散广义积分.

广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$$

发散, 但它的 Cauchy 主值是

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} xdx=0.$$

第五章

无穷级数

---

0. 引言.

本章所考虑的数项级数都假定为实级数, 即由实数项组成的无穷级数. 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

令

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 存在且有限, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为收敛的, 并称 s 为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的和, 记作

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

在相反的情形, 就称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为发散的.

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 叫作非负的或正项的, 如果对于每个 k, 分别有 $a_k \geqslant 0$ 或 $a_k > 0$. 就非负级数而言, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ 意味着级数收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ 意味着级数发散.

凡正负项相间的级数, 也就是形如

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots \quad (a_n > 0; n = 1, 2, \cdots)$$

的级数, 称为交错级数.

对于交错级数, 有下面的简单定理.

Leibniz 定理 如果一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$ 的项满足以下两个条件:

(i) 单调减少, 即 $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为绝对收敛的, 是指级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. 显然, 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛的.

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

的级数, 称为函数项级数, 这里级数的项 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 都是某个变量的函数. 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的 x 值的全体所成之集叫作此级数的收敛域, 而称函数

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和, 其中 x 属于这个级数的收敛域.

若函数 f 在点 x_0 有各阶有限导数, 我们称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

为 f 在 x_0 点的 Taylor 级数. 在实际应用中, 为了简单起见, 往往取 $x_0 = 0$, 这时的 Taylor 级数

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

称为 Maclaurin 级数.

本章的某些例子还将涉及无穷乘积.

对于一个数列

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots,$$

将这一列数连乘起来, 用记号 $\prod$ 表示如下:

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

称为无穷乘积. 如果将数列 $\{p_n\}$ 中前 n 个数连乘起来, 得到

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k,$$

称 P_n 为部分乘积. 令 $n = 1, 2, \cdots$, 就得到部分乘积的序列

$$P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots.$$

对于这个序列 $\{P_n\}$, 只可能有下面三种情形:

(i) 存在非零的有限极限 $\lim_{n\to\infty} P_n = P\ (\neq 0)$,

(ii) 极限为零 $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$,

(iii) 发散, 即不趋向任何有限极限.

在第 (i) 种情形下, 称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

为收敛的, 并称极限值 P 为这个乘积的值, 记为

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n,$$

而在第 (ii), (iii) 种情形时, 称此无穷乘积为发散的.

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 称为绝对收敛或条件收敛的, 如果级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n$ 为绝对收敛或条件收敛, 其中 n_0 是某个 $\geqslant 1$ 的正整数.

有关无穷级数和无穷乘积的更多的材料, 可参看 [7], [28] 和 [98].

1. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

取 $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散.

注 容易证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必定收敛. 上述反例说明了在这个命题中, 不能把绝对收敛减弱为条件收敛.

2. 一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

取 $a_n = 1/n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛.

注 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

3. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使对每一 $k \geqslant 2$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_{k^n}$ 都收敛.

令 $a_n = 1/(n \ln n)$ 则级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

发散. 但对每一 $k \geqslant 2$, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{k^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n n \ln k}$$

收敛.

4. 一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/\sqrt{n}$ 发散.

取 $a_n = 1/[n\ln^2(n+1)]$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n+1)}$$

收敛. 但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

发散.

注 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么由不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}\right)$$

可知, 当 $p > 1/2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/n^p$ 收敛. 上述反例说明了当 $p \leqslant 1/2$ 时, 这个结论不再正确.

5. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.

取 $a_n = (-1)^n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 由于 $a_{2n-1}+a_{2n} = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.

注 容易证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 也收敛, 且其和相等. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 却发散.

取 $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}, b_n = (-1)^n/\sqrt{n} + 1/n$, 易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1.$$

但是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

是一个收敛级数与一个发散级数之和, 因而它是一个发散级数.

注 容易证明, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数, 则当 $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. 上述反例说明了在这个命题中, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数的条件是去不得的.

7. 任给一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以找到一个收敛于零的正数序列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 仍然发散.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数, 令

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

我们先证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}$$

发散. 因为序列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ 发散于无穷大, 故对任意的正整数 m, 可以取正整数 n, 使 $s_{n+1} > 2s_m$. 又, 序列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是单调递增的, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} &\geqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{n+1}} = \frac{s_{n+1}-s_m}{s_{n+1}} \\ &> \frac{s_{n+1}-\dfrac{1}{2}s_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

即对任意正整数 m, 存在正整数 n, 使

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} > \frac{1}{2}.$$

这表明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}$$

的部分和不能形成 Cauchy 序列, 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}} = +\infty.$$

但 $s_{k+1}-s_k = a_{k+1}$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} = +\infty.$$

取 $c_k = 1/s_k$, 则当 $k \to \infty$ 时 $c_k \to 0$, 且 $\sum_{k=2}^{\infty} c_k a_k = +\infty$.

注 这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 怎样慢地发散于无穷大, 总会有一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 比它发散得更慢.

8. 任给一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以找到一个收敛于零的正数序列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/c_n$ 仍然收敛.

令 $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, c_n = \sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}$, 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

兹证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/c_n$ 收敛. 为此, 令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}),$$

则当 $n > m$ 时

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^{n} (\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}) = \sqrt{r_m}-\sqrt{r_n} \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

据 Cauchy 收敛准则, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/c_n$ 收敛.

注 这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 怎样慢地收敛, 总会有一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/c_n$ 比它收敛得更慢.

例 7 和例 8 使我们得到这样的有原则性的断言: 任何收敛 (发散) 级数不可能作为建立跟此级数相比较的另一级数的收敛性 (发散性) 的比较法的万能的工具.

9. 给定使 $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = 0$ 的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 适合 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

从 $\{b_n\}$ 中选取不相邻项的子序列 $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = 0$, 然后设 $a_{n_k} = b_{n_k}^2, k = 1, 2, \cdots$. 至于每个其他值的 $n: n = m_1, m_2, \cdots, m_j, \cdots$, 设 $a_{m_j} = 1/j$. 于是, 当 $n\to\infty$ 时 $a_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 又 $k\to\infty$ 时 $a_{n_k}/b_{n_k} = b_{n_k} \to 0$, 所以 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数序列 $\{b_n\}$ 怎样快地收敛于零, 总有一个足够慢地收敛于零的正数序列 $\{a_n\}$ 以确保级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的发散性, 而且 $\{a_n\}$ 还有一个子序列比 $\{b_n\}$ 的相应的子序列收敛于零更快.

10. 给定使 $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = 0$ 的正数序列 $\{b_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 适合 $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n = +\infty$.

选定 $\{b_n\}$ 的一个子序列 $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得对于各正整数 k, 都有 $b_{n_k} < k^{-3}$, 然后令 $a_{n_k} = k^{-2}, k = 1, 2, \cdots$. 至于其他值的 n, 设 $a_n = n^{-2}$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 又当 $k\to\infty$ 时, $a_{n_k}/b_{n_k} \to +\infty$, 从而 $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n = +\infty$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数序列 $\{b_n\}$ 怎样慢地收敛于零, 总有一个足够快地收敛于零的正数序列 $\{a_n\}$ 以确保级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 而且 $\{a_n\}$ 还有一个子序列比 $\{b_n\}$ 的相应的子序列收敛于零更慢.

11. 给定一个满足 $\underline{\lim}_{n\to\infty} c_n = 0$ 的正数序列 $\{c_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 能使 $a_n/b_n = c_n$.

选定 $\{c_n\}$ 的一个子序列 $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得对于正整数 k, 都有 $c_{n_k} < k^{-2}$, 然后设 $a_{n_k} = c_{n_k}, b_{n_k} = 1, k = 1, 2, \cdots$. 至于每个其他值的 n, 设 $a_n = n^{-2}, b_n = (n^2 c_n)^{-1}$. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 由于 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 而且 $a_n/b_n = c_n, n = 1, 2, \cdots$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数序列 $\{c_n\}$ 怎样慢地收敛于零, 总存在这样两个正项级数, 一个收敛, 另一个发散, 而它们第 n 项的比值就是 c_n.

12. 任给正数 s, 可以找到一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使对任何正数 σ $(0 < \sigma \leqslant s)$, 都可以用一个无穷子级数来表示: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sigma$.

先作一个收敛于 s 的级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s,$$

使其项满足不等式

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots,$$

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots.$$

记

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+\nu} = s_{n,\nu}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots; \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

$$\lim_{\nu \to \infty} s_n = s_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

假定 a_{n_1} 是满足 $a_{n_1} < \sigma$ 的第一项, 则或者存在 ν_1, 使 $s_{n_1,\nu_1} < \sigma, s_{n_1,\nu_1+1} \geqslant \sigma$; $\nu_1 \geqslant 0$; 或者有 $s_{n_1} \leqslant \sigma$. 在第二种情形, 由于 $s_{n_1} \geqslant a_{n_1-1} \geqslant \sigma$, 因此有 $s_{n_1} = \sigma$ (当 $n_1 = 1$ 时, 这意味着 $s_1 = s \geqslant \sigma$), 即 σ 可以用一个无穷子级数表示. 在第一种情况, 我们确定满足 $n_2 > n_1 + \nu_1$ 与 $s_{n_1,\nu_1} + a_{n_2} < \sigma$ 的第一项 a_{n_2}. 则或者存在 ν_2, 满足 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2} < \sigma, s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2+1} \geqslant \sigma, \nu_2 \geqslant 0$; 或者 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} \leqslant \sigma$. 在第二种情形, 我们有 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} = \sigma$, 这是因为 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} \geqslant s_{n_1,\nu_1} + a_{n_2-1} \geqslant \sigma$ (因 $s_{n_1,\nu} + a_{n_1+\nu_1+1} = s_{n_1,\nu_1+1} \geqslant \sigma$, 故 $n_2 > n_1 + \nu_1 + 1$), 即 σ 又可以用一个无穷子级数表示. 如果这个过程永不终止 (如果在每一步总出现第一种情形), 则

$$\sigma = s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2} + s_{n_3,\nu_3} + \cdots.$$

注 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足条件:

$$a_1 = 1/2, \quad a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

那么例 12 中的每个 σ, 仅能用一个无穷子级数来表示, 事实上, 从关系式

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots, \quad a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

推出 $a_n = 2a_{n+1}$, 因此 $a_1 = 1/2, a_2 = 1/4, \cdots, a_n = 1/2^n, \cdots$, 这种无限二进位小数的表示法是唯一的.

13. 一个正项级数, 使任何正有理数都是它的有限个不同项之和.

调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

具有所需的性质. 事实上, 设 A, B 是正整数, 则由此级数的发散性, 存在唯一的非负整数 n_0, 使

$$\sum_{j=0}^{n_0} \frac{1}{j} < \frac{A}{B} \leqslant \sum_{j=0}^{n_0+1} \frac{1}{j}$$

($\sum_{j=0}^{0} \frac{1}{j}$ 算作 0, 而当 $n_0 \geqslant 1$ 时 $\sum_{j=0}^{n_0} \frac{1}{j}$ 理解为 $\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{j}$). 若等式成立, 则已得到所需要的表达式. 故设

$$\frac{A}{B} < \sum_{j=0}^{n_0+1} \frac{1}{j},$$

此时, $\frac{A}{B} - \sum_{j=0}^{n_0} \frac{1}{j} = \frac{C}{D} < \frac{1}{n_0+1}$. 取 n_1 为满足 $\frac{1}{n_1+1} \leqslant \frac{C}{D} < \frac{1}{n_1}$ 的唯一的正整数.

再设不等式成立 (否则问题已解决), 并令

$$\frac{C}{D}-\frac{1}{n_1+1}=\frac{E}{F}>0.$$

但

$$\frac{E}{F}=\frac{C(n_1+1)-D}{D(n_1+1)}, \quad C(n_1+1)-D<C,$$

因此, E/F 为最简分数时必有 $E<C$. 由于

$$\frac{E}{F}<\frac{1}{n_1(n_1+1)},$$

故满足 $1/(n_2+1)\leqslant E/F<1/n_2$ 的唯一的正整数 n_2 也必满足 $n_2>n_1$. 在有限步后, 我们必然得到所要求的表达式, 因为, 即使在前面各步得不到, 也一定会在所导出的分数的分子为 1 时得到.

14. 通项趋于零而发散的交错级数.

设 $a>0, b>0$ 且 $a\neq b$, 考察下列交错级数

$$\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots.$$

易见, 该级数的通项趋于零. 设该级数的第 n 部分和为 S_n, 收敛交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的第 n 部分和为 T_n, 其和为 T, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的第 n 部分和为 U_n, 则

$$\begin{aligned}
S_{2n}&=\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\\
&=a\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=aT_{2n}+\frac{a-b}{2}U_n,\\
S_{2n+1}&=\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\frac{a}{2n+1}\\
&=a\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)\\
&\quad+(a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=aT_{2n+1}+\frac{a-b}{2}U_n.
\end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}T_n=T, \lim_{n\to\infty}U_n=+\infty$, 所以当 $a>b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

而当 $a<b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=-\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty.$$

因此, 该交错级数发散.

注 上述反例说明关于交错级数的 Leibniz 判别法中, 通项的单调性这一条件是不能去掉的.

15. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其部分和序列有界且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

令 $\{a_n\}$ 为

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots,$$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 且对每一 n, 都有 $0 \leqslant s_n \leqslant 1$, 其中

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

然而, 由于 $\{s_n\}$ 中有无穷多个 s_n 取值为 0, 又有无穷多个 s_n 取值为 1, 因而 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 并不存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么其部分和序列有界且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

16. 根检法失效的级数.

对于非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 根检法陈述为 (参看 [98], 中译本 pp.56—57): 给定非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 令

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n},$$

则

(i) $c < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) $c > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(iii) $c = 1$ 时此法失效.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

它们都有 $c = 1$, 而第一个级数发散, 第二个级数收敛, 这说明在 $c = 1$ 的情况下, 根检法失效.

17. 比检法失效的级数.

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 比检法陈述为 (参看 [98], 中译本 pp.57—58):

(i) 当 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) 当对 $n \geqslant n_0$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 这里 n_0 是某个确定的正整数;

(iii) 当 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 时此法失效.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也可作为比检法失效的正项级数, 因为当 $n \to \infty$ 时它们都有 $a_{n+1}/a_n \to 1$, 但第一个级数发散, 第二个收敛.

注 比检法用起来常常比根检法容易, 但根检法适用范围更广泛. 一旦比检法给出收敛的结论时, 用根检法亦然; 而根检法失效时, 比检法也失效. 这是因为有下述一般的事实: 对任意正数序列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, 有

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

及

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

对级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$, 上述两个不等式为

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < +\infty.$$

对这个级数, 由根检法知收敛, 而比检法失效.

18. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ **存在而** $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ **不存在的正项级数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}=1$, 而

$$1 \leqslant \left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{\frac{1}{n}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$$

并不存在.

注 若 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ 存在 $(a_n>0)$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在且有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$$

(参看例 17 的注). 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

19. 两个收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数发散.

两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积级数定义为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 其中

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 为两个相等的级数:

$$a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

于是, 根据交错级数的 Leibniz 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛. 但是,

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}},$$

而

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

所以

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

因此, Cauchy 乘积级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 发散.

注 关于 Cauchy 乘积级数有如下的 Mertens 定理 (参看 [141], 中译本 p.74): 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛于 A, 又如果 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛于 B, 并且这两个级数当中至少有一个绝对收敛, 那么乘积级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛于 AB. 上述反例说明在 Mertens 定理中, 两个级数当中至少有一个绝对收敛这个条件是去不得的.

20. 两个条件收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛.

Davies 和 Weinman [63] 提出下列问题: 两个条件收敛级数的 Cauchy 乘积级数是否有可能是绝对收敛的? Owens [122] 给这个问题以肯定的回答. 他的例子如下:

如所周知, 当 $|t| < 1$ 时, 对任何 m, 函数 $(1+t)^m$ 的 Taylor 级数是绝对收敛的. 若 $-1 < m < 0$, 则当 $t = 1$ 时, 相应的级数条件收敛; 而当 $t = -1$ 时, 它发散. 由此可知, 级数

$$f(x) = (1+x)(1+x^3)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

和

$$g(x) = (1-x+x^2)(1+x^3)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当 $|x| < 1$ 时绝对收敛, 而当 $x = 1$ 时条件收敛, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都是条件收敛的.

因为对任意的 x, 恒有 $f(x)g(x) = 1$, 所以 $c_0 = 1, c_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 其中

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

可见级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

21. 两个发散级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛.

设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

由于这两个级数的通项都不趋于零, 因而它们都是发散级数.

若令 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 则

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots \\ &\quad - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{2^{n+1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

等式右边是公比为 3/4 的等比级数, 故为绝对收敛级数.

22. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使当 $p = 1, 2, 3, \cdots$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$.

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ 是发散的, 但是

$$0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{p}{n},$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} = 0.$$

注 我们知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{m,n\to\infty} (a_{n+1} + a_{a+2} + \cdots + a_m) = 0 \qquad (n < m),$$

这里, n, m 各自独立地趋于无穷大. 上述反例表明, 当 n, m 不是独立地而是相关地 (m 随 n 趋于无穷大而趋于无穷大) 趋于无穷大时, 由

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m(n)}) = 0$$

推不出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

23. 具有发散重排的收敛级数.

任何条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项都可以重排而给出发散级数或重排后其和为事先指定的任意数. 事实上, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的非负部分与负部分分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 也都发散, 设 c 是任意 (有限) 实数. 我们如下地确定重排: 先放置项

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1}$$

直至此和刚超过 c, 然后接项

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{n_1}$$

直至整个部分和刚小于 c. 然后再接上项

$$p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \cdots + p_{m_2}$$

直至整个部分和刚超过 c, 然后是

$$q_{n_1+1} + q_{n_1+2} + \cdots + q_{n_2}$$

直至整个部分和刚小于 c, 如此继续. 上述各步都可行, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 是发散的. 由于 $n \to \infty$ 时 $p_n \to 0$, $q_n \to 0$ (因为 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$), 而重排后级数的部分和与 c 的差的绝对值始终小于数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的某一项, 或者小于数列 $\{|q_n|\}_{n=1}^{\infty}$ 的某一项, 故这样得到的 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重排级数收敛于 c.

为了看到存在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重排使其部分和发散于 $+\infty$, 我们考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的这样的重排: 交错地放置一组正项和一个负项. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散, 它的部分和无界, 故可取充分大的 m_1 使

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} > 1 - q_1,$$

然后取 $m_2 > m_1$, 使

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1} + \cdots + p_{m_2} > 2 - q_1 - q_2,$$

一般地, 可取充分大的 $m_k > m_{k-1}$, 使

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_k} > k - q_1 - q_2 - \cdots - q_k \quad (k = 3, 4, \cdots),$$

因此, 交错地放置一组正项和一个负项的级数

$$p_1 + \cdots + p_{m_1} + q_1 + p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2} + q_2 + p_{m_2+1} + \cdots$$

显然是发散的, 它的第 k 个部分和

$$p_1 + \cdots + p_{m_1} + q_1 + \cdots + p_{m_k} + q_k$$

超过 k.

类似地可得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的发散于 $-\infty$ 的重排.

例 23 所述的排法就是著名的 "Riemann 重排定理".

注 Sierpiński [149] 曾经指出, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛级数, 其和为 s, 又 $s' < s$, 那么, 经过某种只涉及正项的重排 (负项留在它们原来的位置), 重排后的级数以 s' 为和. 类似的陈述可用于 $s'' > s$, 并且重排只涉及负项. 这显然是 "Riemann 重排定理" 的一种推广.

24. 存在一个发散级数, 用重排不可能加快其发散程度.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的正项级数, 满足 $a_n \geqslant a_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 则对任意正整数序列

$$0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots,$$

恒有

$$m_1 \geqslant 1, \quad m_2 \geqslant 2, \quad \cdots, \quad m_n \geqslant n, \quad \cdots,$$

因此

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n}.$$

由此可知, 用任意的重排都不可能加快 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的发散程度.

25. 存在一个发散级数, 用重排可以任意减慢其发散程度.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个通项趋于零的正项发散级数, 令

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

则 $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. 任意取序列 $\{b_n\}$, 适合

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

我们只要证明, 存在重排级数

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} + \cdots,$$

使对一切 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 都有

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} \leqslant b_n.$$

为此, 设 $r_1, r_2, r_3, \cdots; s_1, s_2, s_3, \cdots$ 是两列无公共项的递增的正整数序列, 又设每个正整数总要出现在这两个序列中的一个或另一个之中, 于是, 对 $m, n = 1, 2, 3, \cdots$, 有

$$r_m < r_{m+1}, \quad s_n < s_{n+1}, \quad r_m > s_n \quad 或 \quad r_m < s_n.$$

称两个级数

$$a_{r_1} + a_{r_2} + a_{r_3} + \cdots \quad 和 \quad a_{s_1} + a_{s_2} + a_{s_3} + \cdots$$

("红" 的和 "蓝" 的) 为级数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 的互补的子级数. 现如次确定 "红" 的子级数

$$a_{r_1} + a_{r_2} + a_{r_3} + \cdots,$$

使

$$a_{r_n} < \min\{2^{-n}, b_n - b_{n-1}\}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad b_0 = 0,$$

则

$$a_{r_1} + a_{r_2} + \cdots + a_{r_n} < b_n,$$

且整个 "红" 的子级数收敛, 还容易看出, $b_n - (a_{r_1} + a_{r_2} + \cdots + a_{r_n})$ 无限制地增加. 因而, 在关系式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{r_i} < b_n$$

的容许范围内可以逐个收容互补子级数的项. 这样就完成了所需的重排.

26. 一个实数序列 $\{a_n\}$, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 当 $l=5$ 时发散, 而当 l 不等于 5 的任何奇正数时收敛.

求两个方程的方程组

$$\begin{cases} u+2v+3w=0, \\ u+8v+27w=0 \end{cases}$$

的三个未知数的整数解, 得到

$$u=5, \quad v=-4, \quad w=1.$$

注意

$$u+32v+243w=120.$$

对 $m=1,2,3,\cdots$, 定义

$$a_{10m-9}=a_{10m-8}=a_{10m-7}=a_{10m-6}=a_{10m-5}=m^{-1/5},$$
$$a_{10m-4}=a_{10m-3}=a_{10m-2}=a_{10m-1}=-2m^{-1/5},$$
$$a_{10m}=3m^{-1/5},$$

且

$$a_1^l+a_2^l+\cdots+a_n^l=s_n^{(l)}.$$

则

$$s_{10m}^{(1)}=s_{10m}^{(3)}=0, \quad s_{10m}^{(5)}=120\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

所以当 $l=1$, $l=3$ 时, 所论级数条件收敛于 0. 当 $l=5$ 时, 发散至 $+\infty$, 当 $l>5$ 时, 绝对收敛.

27. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+a_{k+3l}+\cdots$ 的子级数 (下标成等差级数, k,l 为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛.

下面的例子属于 Knopp [99].

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散, 令

$$a_1=b_1, \quad a_2=a_3=\frac{b_2}{2!}, \quad a_4=a_5=\cdots=a_9=\frac{b_3}{3!}, \quad a_{10}=\cdots=a_{33}=\frac{b_4}{4!}, \quad \cdots.$$

注意当 $n \geqslant l$ 时, $n!$ 能被 l 整除, 因此当把属于同一个 b_m 的所有项放在一起之后, 除了有限多项外, 就能把子级数 $a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+\cdots$ 变为级数 $\frac{1}{l}b_1+\frac{1}{l}b_2+\frac{1}{l}b_3+\cdots$. 由此可知, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k+(i-1)l}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散.

28. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k+a_{kl}+a_{kl^2}+\cdots$ 的子级数 (下标成几何级数, $k \leqslant 1$, $l \leqslant 2$ 均为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛.

下面的例子也是属于 Knopp [99] 的.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散, 并设 $\varphi(n) = kl^n$, $\Phi(n) = 2^{n^2}$, 则 $\{\varphi(n)\}$ 和 $\{\Phi(n)\}$ 都是严格递增的正整数序列. 现在定义一新的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其通项为

$$a_\nu = \frac{b_m}{\Phi(m) - \Phi(m-1)} = \frac{b_m}{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}}, \quad 2^{(m-1)^2} < \nu \leqslant 2^{m^2};$$

且

$$a_1 = a_{\Phi(1)} = \frac{b_1}{\Phi(1)} = \frac{b_1}{2}.$$

由不等式 $\varphi(t_m) \leqslant \Phi(m) < \varphi(t_m + 1)$ 可以完全确定正整数 t_m. 把属于同一个 b_m 的项放在一起, 就能把级数 $a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + \cdots$ 变为级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_m - t_{m-1}}{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}} b_m.$$

可以证明, 序列 $\{(t_m - t_{m-1})/(2^{m^2} - 2^{(m-1)^2})\}$ 在某个 m 以后是单调递减的, 于是, 由 Abel 判别法 (参看 [7], pp.608—609) 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ 收敛, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{kl^{n-1}}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散.

29. 任意地划分奇正整数集为两个没有公共元素的子集 D 和 C, 一个实数序列 $\{a_n\}$, 使当 $l \in C$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 收敛, 而当 $l \in D$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^l$ 发散.

这是由 Pólya 提出并由 Fine 解决的一个问题, 细节说明可参看 [125] 和 [73].

30. 对于任一条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和任一实数 x, 存在序列 $\{\varepsilon_n\}$, 其中 $|\varepsilon_n| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, 能使 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = x$.

这里的方法类似于例 23 中所用过的方法. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 我们可以添上绝对值为 1 的因子 ε_n, 使得

$$\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \cdots + |a_n| > x.$$

设 n_1 为能确保这个不等式成立的 n 的最小值. 再给后面的一些项配备绝对值为 1 的因子 ε_n, 以便得到 (用最小可能的 n_2):

$$\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} = |a_1| + \cdots + |a_{n_1}| - |a_{n_1+1}| - \cdots - |a_{n_2}| < x.$$

如果这个过程以部分和交替地大于 x 和小于 x 重复下去, 由于当 $n \to +\infty$ 时 $a_n \to 0$, 于是, 类似于例 23, 得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ 必然收敛于 x.

31. 非绝对收敛级数, 适当地引进括号后变成绝对收敛级数.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛级数, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故由 Cauchy 收敛原理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有正整数 N 存在, 当 $n > N$ 时, 对一切正整数 p 有

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon.$$

今取 $\varepsilon = 1$, 则有正整数 n_1 存在, 对于一切正整数 p_1,

$$|a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_1+p_1}| < 1.$$

取 $\varepsilon = 1/2^2$, 则有正整数 n_2 存在 (可取 $n_2 > n_1$), 对于一切正整数 p_2,

$$|a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_2+p_2}| < \frac{1}{2^2}.$$

于是取 $p_1 = n_2 - n_1$, 则有

$$|a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < 1.$$

取 $\varepsilon = 1/3^2$, 则有 n_3 存在 (可取 $n_3 > n_2$), 对于一切正整数 p_3,

$$|a_{n_3+1} + \cdots + a_{n_3+p_3}| < \frac{1}{3^2}.$$

于是取 $p_2 = n_3 - n_2$, 则有

$$|a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_3}| < \frac{1}{2^2}.$$

如此继续进行, 则得

$$|a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+1}| < \frac{1}{k^2} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

考虑级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$. 令 $b_k = a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+1}$, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 就是在级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ 中将 $a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+1}$ 加上括号而得到的.

比较级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ 与级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ 的一般项, 由于 $|b_k| < 1/k^2$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 绝对收敛. 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 系由级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ 加上括号而得, 故可将级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ 加上括号后变为绝对收敛级数, 从而可将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 适当加上括号, 使其变为绝对收敛级数.

32. 收敛而不绝对收敛的无穷乘积.

据定义, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的绝对收敛或条件收敛是随级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 的绝对收敛或条件收敛而定的. 容易证明, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 绝对收敛的充要条件为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)$ 绝对收敛.

我们考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n - 1| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ 不绝对收敛.

令 $p_n = 1 + a_n$, 其中 $a_n = (-1)^{n+1}/n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 都收敛, 因而无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

是收敛的 (参看 [7], p.624).

33. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛.

考虑级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots.$$

易见

$$s_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1},$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = +\infty.$$

又

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(s_{2n} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{n+2}\right) = +\infty,$$

因此, 这个级数发散到 $+\infty$.

对于无穷乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots,$$

我们有

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots \\ &\quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ 收敛, 故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right)$$

收敛, 因而 $\lim_{n\to\infty} P_{2n}$ 存在. 又因为

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P_{2n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} P_{2n},$$

所以无穷乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

收敛.

34. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2$ 都发散, 而无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 却收敛.

考虑级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad +\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)+\cdots, \end{aligned}$$

则

$$s_{2n+1} = a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n+2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1},$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = +\infty.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散到 $+\infty$. 又,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{3}+\cdots,$$

这个正项级数包含了发散级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ 的所有项, 因此, 它也是一个发散级数.

最后讨论无穷乘积

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$$
$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

的收敛性. 因为

$$\begin{aligned}P_{2n+1}&=(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)\cdots(1+a_{2n+2})\\&=4\left[1-\frac{1}{(n-1)^2}\right],\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1}=4.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}=\lim_{n\to\infty} P_{2n+1},$$

故知无穷乘积

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+a_n)\ 收敛.$$

注 可以证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_2^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 亦收敛 (参看 [7], p.624). 例 32 与例 33 说明了这个命题之逆并不成立.

35. $[1,+\infty)$ **上的正值连续函数** f, **使** $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ **收敛而** $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **发散.**

在各整数 $n>1$, 令 $g(n)=1$; 在闭区间 $[n-n^{-2},n]$ 和 $[n,n+n^{-2}]$ 的非整数端点, g 取 0; 而在闭区间 $[n-n^{-2},n]$ 和 $[n,n+n^{-2}]$ 的内部, 定义 g 是线性的; 最后, 在 $x\geqslant 1$ 而 $g(x)$ 尚未定义的点, 规定 $g(x)$ 的值为 0. 于是, 函数

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2}$$

是 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数, 且广义 (R) 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 然而, $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$ 并不成立, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

36. $[1,+\infty)$ **上的正值连续函数** f, **使** $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ **发散而** $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **收敛.**

对于各个整数 $n>1$, 设 $g(n)=0$; 在闭区间 $[n-n^{-1},n]$ 和 $[n,n+n^{-1}]$ 的非整数端点处, 定义 g 的值等于 1; 而在这些闭区间内部, g 是线性的; 最后, 在 $[1,+\infty)$ 上 $g(x)$ 还没有确定值的点处, $g(x)$ 都定义为 1. 于是

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2}$$

是 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数, 而

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

注 我们有如下的级数的积分检验法 (参看 [134], 中译本 pp.50—51): 如果 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负的不增函数, 那么广义 (R) 积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 例 35 和例 36 说明了在级数的积分检验法中, 函数的 "非负不增性" 不能代以 "正值连续性".

37. 给定 $[0,1)$ 上满足条件 $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ 的正值连续函数 f, 可构造具有非负系数的幂级数 P, 适合 $P(x)<f(x)$ 且 $\lim_{x\to 1} P(x)=+\infty$.

正面的构造法属于 Besicovitch [43].

引理 设 f 是 $[0,1)$ 上的正值连续函数, 且 $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$, 则存在正整数 n, 使函数

$$f_1(x)=f(x)-x^n$$

也是 $[0,1)$ 上的正值连续函数且 $\lim_{x\to 1} f_1(x)=+\infty$.

证 显然, f 在 $[0,1)$ 上能取到最小值且其最小值为一正数, 记

$$m=\min_{0\leqslant x<1} f(x)>0.$$

据条件, 存在 $x_0<1$, 当 $x\geqslant x_0$ 时 $f(x)>1$. 令 n_1 是满足条件 $x_0^{n_1}<m$ 的正整数, 则函数 $f_1(x)=f(x)-x^{n_1}$ 具有所需的性质. 引理证毕.

据引理, 存在正整数序列 $\{n_k\}$, 使函数

$$f_1(x)=f(x)-x^{n_1}, \quad f_2(x)=f_1(x)-x^{n_2}, \quad \cdots$$

在 $[0,1)$ 上正值连续且 $\lim_{x\to 1} f_k(x)=+\infty$. 又据函数 f_k 的定义, 我们有

$$f_k(x)=f(x)-(x^{n_1}+x^{n_2}+\cdots+x^{n_k}).$$

于是, $P(x)=x^{n_1}+x^{n_2}+\cdots+x^{n_k}+\cdots<f(x)$ 且 $\lim_{x\to 1} P(x)=+\infty$.

38. $[0,1)$ 上的一个适合条件 $f(0)>0$ 且 $\int_0^1 f(x)dx=+\infty$ 的递增连续函数 f, 使对任何具有非负系数的幂级数 P, 若 $P(x)\leqslant f(x)$, 则 $\int_0^1 P(x)dx<+\infty$.

下面的构造法属于 Besicovitch [43].

在点 0 和 $\alpha_k=1-2^{-2^k}$ 处, 分别令 f 的值 $f(0)=1$ 和 $f(\alpha_k)=2^{2^k-1}(k=1,2,\cdots)$, 而在这些点之间, 令 f 为线性函数. 于是, f 是 $[0,1)$ 上的递增连续函数, 且

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x)dx=\frac{1}{2}(2^{2^k-1}+2^{2^k})(2^{-2^k}-2^{-2^k+1}),$$

从而

$$\int_0^1 f(x)dx\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x)dx=+\infty.$$

设 $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $a_n\geqslant 0$ 且 $P(x)\leqslant f(x)$. 兹证

$$\int_0^1 P(x)dx<+\infty.$$

为此, 只要证明

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} P(x)dx=O(k^{-2}) \tag{1}$$

即可. 设 M 是正整数 (待定), 则有

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\sum_{n=0}^{M}a_nx^ndx&=\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\sum_{n=0}^{M}\frac{x^n}{\alpha_k^n}a_n\alpha_k^ndx\\&\leqslant\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\left(\frac{x}{\alpha_k}\right)^M\sum_{n=0}^{M}a_n\alpha_k^ndx\leqslant P(\alpha_k)\alpha_k^{-M}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}x^Mdx\\&\leqslant f(\alpha_k)\alpha_k^{-M}(1-\alpha_k)=2^{2^{k-1}}(1-2^{-2^k})^{-2^{2^k}M2^{-2^k}}2^{-2^k}\\&<2^{-2^{k-1}}4^{M2^{-2^k}}.\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\sum_{n=M+1}^{\infty}a_nx^ndx\leqslant\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}\left(\frac{x}{\alpha_{k+1}}\right)^M\sum_{n=M+1}^{\infty}a_n\alpha_{k+1}^ndx\\&<P(\alpha_{k+1})M^{-1}\leqslant f(\alpha_{k+1})M^{-1}=2^{2^k}M^{-1}.\end{aligned}$$

于是

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}P(x)dx<2^{-2^{k-1}}4^{M2^{-2^k}}+2^{2^k}M^{-1}.$$

取 $M=2^{2^k}k^2$, 则有

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}P(x)dx<2^{-2^{k-1}}4^{k^2}+k^{-2}=O(k^{-2}),$$

故 (1) 式成立.

注 下面两个问题是颇有趣味的.

(1) 是否存在正值函数序列 $\{u_n(x)\}$, 使对每一正系数序列 $\{a_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_nu_n(x)]$ 处处收敛?

(2) 是否存在正值函数序列 $\{u_n(x)\}$, 使对每一正系数序列 $\{a_n\}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_nu_n(x)]$ 除了在至多为一可数集收敛以外, 它都是发散的?

Besicovitch [44] 指出, 这两个问题的答案都是否定的.

39. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数处处收敛, 但仅在一点与这个函数相合.

第一例 函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是无穷可微的, 并且它的所有各阶导数在 $x = 0$ 处都等于零, 所以它的 Maclaurin 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

在实轴上收敛于恒等于零的函数. 因此, 它只能在唯一的点 $x = 0$ 处与 $f(x)$ 相合.

这个例子是由 Scheeffer [144] 作出的.

第二例 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n}x^2} \quad (a > 1),$$

因为接连逐项微分得到的所有级数中都出现因子 $1/n!$, 所以这些级数全部一致收敛, 这就说明了函数 f 是无穷可微的 (参看 [7], p.643). 容易算出,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2m - 1, \\ (2m)!(-1)^m e^{-a^{2m}}, & k = 2m, \end{cases}$$

因此, f 的 Maclaurin 级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2n}} x^{2n}.$$

对每一 x, 这个级数都收敛于函数 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2n}} x^{2n}.$$

易见, 当 $x = 0$ 时 $\varphi(0) = f(0) = 1/e$, 而当 $x \neq 0$ 时 $\varphi(x) \neq f(x)$.

这个例子是由 Pringsheim 作出的.

注 上述反例说明了从函数 f 在点 a 的各阶有限导数的存在性不能推出对任意的 $x \neq a$, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

正因为如此, 所以我们在研究某个函数的 Taylor 级数时, 就必须讨论这个级数的余项.

40. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数仅在一点收敛.

函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{a^{-n}}{a^{-2n} + x^2} \quad (a > 1)$$

是无穷可微的, 因为接连逐项微分得到的所有级数中都出现因子 $1/n!$, 所以这些级数全部一致收敛, 因而 $f(x)$ 是无穷可微的, 它的 Maclaurin 级数是

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{a^{2k+1}} x^{2k}.$$

显然, 对于任意的 $x \neq 0$, 此级数发散; 而在 $x = 0$ 处, 它收敛于 e^a.

注 例 40 说明了一个无穷可微函数的 Maclaurin 级数并不一定收敛. 例 39 说明了即使该级数收敛, 也不一定收敛于这个函数.

第六章

一致收敛

---

0. 引言.

这一章例子处理的是某些集合上的函数序列或函数项级数的一致收敛性, 也涉及不一致收敛性.

设 $\{s_n(x)\}$ 是定义在点集 $E \subset R^1$ 上的函数序列, 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 恒有只依赖于 ε 的正整数 $N(\varepsilon)$, 使 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

对 E 上的一切 x 都成立, 则称 $\{s_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $s(x)$.

若函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 的任一非空子区间上都不一致收敛, 则称 $\{s_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上无处一致收敛.

若函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的部分和序列 $s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 在 E 上一致收敛, 则称函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 E 上一致收敛.

Cauchy 一致收敛原理 函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛的充要条件为, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

对任意的正整数 p 和 E 上任意的 x 都成立.

把 $s_n(x)$ 看成是函数项级数的部分和, 就可得到级数的 Cauchy 一致收敛原理如下: 函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 E 上一致收敛的充要条件为, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意的正整数 p 和 E 上任意的 x 都成立.

Weierstrass 判别法 若对充分大的 n, 恒有实数 a_n, 使得 $|u_n(x)| \leqslant a_n$ 对 E 上任意的 x 都成立, 并且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

Abel 判别法 如果 1) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 E 上一致收敛; 2) 对每一固定的 $x \in E$, $b_n(x)$ 随 n 而单调, 而对任意的 $x \in E$ 和 n, 有 $|b_n(x)| \leqslant L$ (不依赖于 x 和 n 的定数), 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

Dirichlet 判别法 如果 1) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

在 E 上一致有界, 即存在常数 M, 使对任何 $x \in E$ 及正整数 n, 都有 $|A_n(x)| \leqslant M$; 2) 对每一 $x \in E$, $b_n(x)$ 随 n 而单调, 并且函数序列 $\{b_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于零, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

1. 在各个 E_k $(k = 1, 2, \cdots)$ 上一致收敛, 而在 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上不一致收敛的函数序列.

设 $f_n(x) = x^n (n = 1, 2, \cdots)$, 则函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在每个区间 $E_k = [\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}] (k = 1, 2, \cdots)$ 上都一致收敛于零. 然而, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1) = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上并不一致收敛.

注 容易证明, 如果 $\{f_n(x)\}$ 在各个 E_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上一致收敛, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上也一致收敛. 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个集合的并集上去.

2. 一个在紧集上一致有界的连续函数序列, 而不存在逐点收敛的子列.

令

$$f_n(x) = \sin nx, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

假若存在某个正整数序列 $\{n_k\}$, 使得 $\{\sin n_k x\}$ 对每个 $x \in [0, 2\pi]$ 都收敛, 那么必然有

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

由此得到

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

根据 Lebesgue 有界收敛定理 (参看 [6], p.99), 就得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0.$$

但是由简单计算可得

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi.$$

此为矛盾. 因此, $\{\sin nx\}$ 中不存在逐点收敛的子列.

注　所谓函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界，是指对于每一 $x \in E$，序列 $\{f_n(x)\}$ 是有界的. 也就是说，存在着一个定义在 E 上的有限值函数 φ，使对一切 $x \in E$，都有

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

容易证明，如果 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界，并且 E_1 是 E 的一个可数子集，那么总能找到一个子列 $\{f_{n_k}\}$，使对每一 $x \in E_1$，序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 都收敛. 上述反例说明，即使 $\{f_n\}$ 是某个紧集 E 上一致有界的连续函数序列，也未必有在 E 上逐点收敛的子列.

3. 一个一致有界且处处收敛的连续函数序列，它没有一致收敛的子列.

设

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则对任何 $x \in [0, 1]$ 及正整数 n，恒有 $|f_n(x)| \leqslant 1$，即 $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上是一致有界的. 又对每一 $x \in [0, 1]$，都有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛于零. 但是，由于

$$f_n(1/n) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

可见 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[0, 1]$ 上都不可能一致收敛.

注　可以证明，若 $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界且等度连续，即任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，当 $x', x'' \in [0, 1]$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时，都有

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{f_n\}$ 必有一致收敛的子列. 上述反例表明，一致有界且处处收敛的连续函数序列未必有一致收敛的子列.

4. 一个有界函数序列，它处处收敛于一个无界函数.

下列函数

$$f_n(x) = \begin{cases} \min\{n, 1/x\}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上全都有界，且在 $[0, 1]$ 上处处收敛于函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

然而极限函数 f 在 $[0, 1]$ 上无界.

注　容易证明，一致收敛的有界函数序列，它的极限函数也是有界的. 上述反例说明了在这一陈述中一致收敛的条件不能减弱为处处收敛.

5. 一个不一致有界的函数序列, 它处处收敛于一个有界函数.

设

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 或 } 1/n\leqslant x\leqslant 1,\\ n, & \text{当 } x=1/(2n),\end{cases}$$

在 $[0,1/(2n)]$ 和 $[1/(2n),1/n]$ 命 f_n 是线性函数, 并且使 f_n 在 $[0,1]$ 上是连续的. 函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于零: 因为当 $x=0$ 时, 显然成立; 而当 $x>0$ 时, 只要 $n>1/x$, 就有 $f_n(x)=0$. 然而, 所给的函数序列在 $[0,1]$ 上并不一致有界.

注 容易证明, 如果函数序列 $\{f_n\}$ 在点集 E 上一致有界且处处收敛于函数 f, 那么 f 在 E 上也必有界. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立. 即, 确实存在不一致有界的函数序列, 它却处处收敛于一个有界函数.

6. 一个连续函数序列的非一致极限, 它在一个稠密集上无处连续.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ p \text{ 与 } q \text{ 是互质的整数且 } q>0,\\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的其他点}.\end{cases}$$

对于任意正整数 n, 定义 f_n 如下: 按照各点 $(\frac{p}{q},\frac{1}{q})$, 其中 $1\leqslant q<n$, $0\leqslant p\leqslant q$, 在各个形如 $(\frac{p}{q}-\frac{1}{2n^2},\frac{p}{q})$ 的区间, 定义

$$f_n(x)=\min\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{q}+2n^2\left(x-\frac{p}{q}\right)\right\};$$

在各个形如 $(\frac{p}{q},\frac{p}{q}+\frac{1}{2n^2})$ 的区间, 定义

$$f_n(x)=\max\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{q}-2n^2\left(x-\frac{p}{q}\right)\right\};$$

以及, 在 $[0,1]$ 上 $f_n(x)$ 仍未得到定义的各个点 x, 则令 $f_n(x)=1/n$. 在 $[0,1]$ 之外, 定义 $f_n(x)$ 使其成为以 1 为周期的周期函数. 于是, $f_n(x)$ 的图形成为一条无穷的折线弧, 它的各段或者位于水平线 $y=1/n$ 上, 或者以斜率 $\pm 2n^2$ 上升, 到达局部极大点, 这点便是 f 的图形中的 "钉子" 的尖端 (参看图 4).

随着 n 的递增, 这些 "钉子" 越来越尖, 而底线趋近 x 轴. 因此, 对各个 $x\in R^1$ 及 $n=1,2,\cdots$, 都有

$$f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x),$$

又

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

其中 f 就是一开始定义的函数, 并且以 1 为周期把它扩张到整个实轴上. 于是, 每个函数 f_n 在 R^1 上全都处处连续, 而极限函数 f 在有理数稠密集上无处连续.

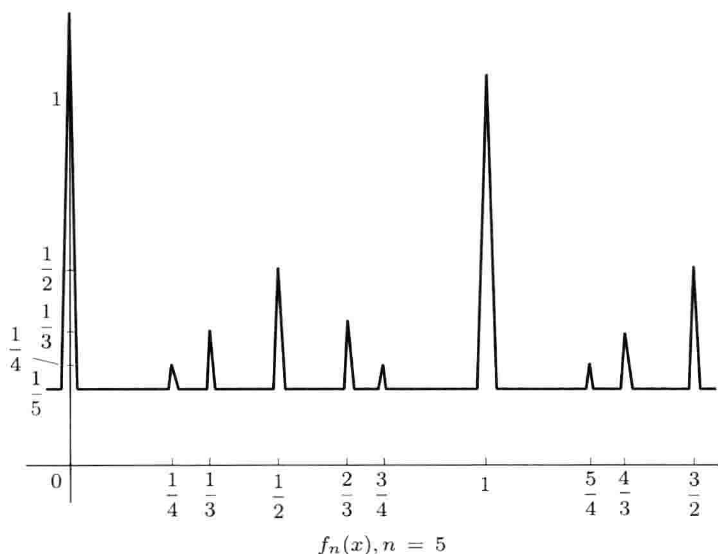


图 4

注 容易证明, 若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 则 f 在 $[a,b]$ 上亦必连续. 上述反例说明了连续函数序列的非一致极限不必连续, 甚至在一个稠密集上无处连续.

7. 一个连续函数序列, 它的非一致极限也是一个连续函数.

设

$$s_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则对每一 $x \in [0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0.$$

兹证 $\{s_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于零. 为此, 只要证明对于任何正数 M, 在 $x=0$ 的附近总可以选取 x 及正整数 n, 使得 $s_n(x) > M$. 令

$$s_n' = \frac{n^2(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2} = 0,$$

得 $x_n = n^{-3/2}, s_n(x_n) = \frac{1}{2}n^{1/2}$, 可见当 n 充分大时, 就有 $s_n(x_n) > M$. 因此, $\{s_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于零.

这个例子是由 Osgood [120] 作出的.

注 连续函数序列的一致极限也是连续函数. 上述反例说明了连续函数序列的非一致极限也可能是连续函数.

8. 一个递减的连续函数序列, 它处处收敛于某个连续函数, 但并不一致收敛.

在开区间 $(0,1)$ 内如下定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad n=1,2,\cdots,$$

则对每一 n, f_n 在 $(0,1)$ 上连续, 且 $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. 又, 对任一 $x \in (0,1)$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

然而, 由于 $f_n(1/n) = 1/2$, 可见 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上并不一致收敛于零.

注 如果定义在紧集 E 上的递减的连续函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于某个连续函数 f, 那么 $\{f_n\}$ 在 E 上必定一致收敛于 f (参看 [7], pp.646—647). 上述反例说明了在这个命题中, E 为紧集的条件是去不得的.

9. 一个无处连续的函数序列, 它一致收敛于一个处处连续的函数.

设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无处连续, 但函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于连续函数 $f(x) \equiv 0$.

10. 收敛而无处一致收敛的连续函数序列.

我们在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q,\ p \text{ 与 } q \text{ 是互质的整数且 } q>0, \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的其他点}, \end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 中的任一有理点间断, 而在任一无理点连续.

我们再在区间 $[0,1]$ 上定义连续函数序列 $\{f_n\}$ 如下: 对每一正整数 n, 令 $f_n(x)$ 的图形为依次连接

$$(0,f(0)), \left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right), \left(\frac{2}{2^{n+1}}, f\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)\right), \cdots,$$
$$\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}, f\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)\right), (1, f(1))$$

的直线段而成的. 易见, 函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上连续且处处收敛于 f. 因为极限函数 f 在 $[0,1]$ 的任何非空子区间上都不连续, 所以函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 的任何非空子区间上都不能一致收敛于 f, 即 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上无处一致收敛.

注 这个例子中的极限函数在 $[0,1]$ 的任何非空子区间上都不连续, 针对这一情况, 我们再进一步构造一个在 $[0,1]$ 上处处收敛于零的连续函数序列, 而它却无处一致收敛.

令

$$F_n = \left\{\frac{k}{2^m} : 0 < \frac{k}{2^m} \leqslant 1, m \in \{0,1,\cdots,n\}, k \text{ 为正整数}\right\},$$

并令

$$f_n(0)=0,\quad f_n\left(\frac{k}{2^m}\right)=0,\quad \frac{k}{2^m}\in F_n.$$

又当 $\frac{k}{2^m}\in F_n$ 且 k 为奇数时, 定义

$$f_n\left(\frac{k}{2^m}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^m}.$$

最后, 在 $[0,1]$ 上 f_n 尚未得到定义的各个小区间上, 令 f_n 为线性函数且连续. 于是, 对每一 n, f_n 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

易见, 对每一 $x\in[0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 都收敛于零. 然而, 对任何非空子区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, $\{f_n\}$ 在 (α,β) 上都不可能一致收敛于零. 事实上, 我们可取奇数 k_0 与非负整数 m_0, 使 $\frac{k_0}{2^{m_0}}\in(\alpha,\beta)$, 而 $\frac{1}{2^{n+1}}\to 0\ (n\to\infty)$, 所以存在正整数 N, 当 $n>N$ 时就有 $\frac{k_0}{2^{m_0}}-\frac{1}{2^{n+1}}\in(\alpha,\beta)$. 今取正数 $\varepsilon_0\left(0<\varepsilon_0<\frac{1}{2^{m_0}}\right)$, 并令 $x_n=\frac{k_0}{2^{m_0}}-\frac{1}{2^{n+1}}$, 则当 $n>N$ 时, 恒有

$$f_n(x_n)=\frac{1}{2^{m_0}}>\varepsilon_0.$$

这就表明 $\{f_n\}$ 在 (α,β) 上不一致收敛于零.

11. 一个各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数, 但无处一致收敛.

下面的例子是由 Young [174] 作出的.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数序列:

$$u_1(x)=\begin{cases}0, & x\neq\frac{1}{2},\\[2mm] 1, & x=\frac{1}{2};\end{cases}\qquad u_2(x)=\begin{cases}-1, & x=\frac{1}{2},\\[2mm] 1, & x=\frac{1}{4},\frac{3}{4},\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}$$

$$u_3(x)=\begin{cases}-1, & x=\frac{1}{4},\frac{3}{4},\\[2mm] 1, & x=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}\qquad \cdots$$

$$u_n(x)=\begin{cases}-1, & x=\frac{1}{2^{n-1}},\frac{3}{2^{n-1}},\cdots,\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},\\[2mm] 1, & x=\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n},\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}\qquad \cdots$$

于是,

$$s_1(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{2},\\ 1, & x=\dfrac{1}{2};\end{cases}\qquad s_2(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\\ 1, & x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4};\end{cases}\qquad \cdots$$

$$s_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\\ 1, & x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n}.\end{cases}$$

可以证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于函数 $s(x)\equiv 0$. 事实上, 任取 $x_0\in[0,1]$, 若 x_0 为无理数, 则 $s_n(x_0)=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=0.$$

若 x_0 为有理数, $x_0=\frac{m}{k}$, 则当 n 充分大时, $2^n>k$, 从而 $\frac{m}{k}$ 不等于 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$ 中的任何一个, 所以也有 $s_n(x_0)=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=0.$$

兹证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在任何区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$ 上都不可能一致收敛于 $s(x)$. 为证明这一结论, 我们令

$$R_n(x)=s(x)-s_n(x)=\begin{cases}-1, & x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\\ 0, & x\neq \dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\end{cases}$$

于是, 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 而言, 不管 n 多么大, 总可以在 (α,β) 内找到形如 $\frac{m}{k}$ $(k\geqslant n, 1\leqslant m<k)$ 的点 x_0, 在这种点上, $|R_n(x_0)|=1$, 这就表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (α,β) 上不一致收敛于 $s(x)$.

12. 一个正整数序列 $a_1<a_2<\cdots$ 及紧集 C, 使对任意 $x\in C, \sin a_nx\to 0(n\to\infty)$, 而 $\{\sin a_nx\}$ 在 C 上并不一致收敛.

Shields [148] 提出如下的问题: 如果 $a_1<a_2<\cdots$ 是正整数, C 是紧集, 且对任意 $x\in C$, 都有 $\sin a_nx\to 0$ $(n\to\infty)$, 那么 $\{\sin a_nx\}$ 在 C 上是否必定一致收敛? Freimer [75] 指出, 这个问题的答案是否定的. 他的例子如下:

取 $a_n=n!$ $(n=1,2,\cdots), C=\{0,\pi,\pi/2,\pi/3,\pi/4,\cdots\}$. 因为当 $n\geqslant m$ 时, $n!/m$ 是整数, 所以对任何 $x\in C$, 存在正整数 N_x, 当 $n>N_x$ 时, $\sin a_nx=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sin a_nx=0.$$

另一方面, 对任意固定的正整数 n, 存在 $x\in C$, 例如可取 $x=\pi/2n!$, 使 $\sin a_nx=1$, 所以 $\{\sin a_nx\}$ 在 C 上并不一致收敛.

13. 给定 $[0,+\infty)$ 上的实值函数 f, 适合 $f(0)=0, f(1)\neq 0, \lim_{n\to\infty} f(n)=0$, 可构造正整数序列 $\{a_n\}$ 及紧集 C, 使 $\{f(a_n x)\}$ 在 C 上收敛而非一致收敛.

下面的例子是由 Schneider 作出的[①]

设 C 是由 0 及 $1/n$ $(n=1,2,\cdots)$ 的点组成, 令 $a_n=n!$. 对 C 中每一非零点 $x, a_n x$ 显然为一整数 (当 n 充分大), 所以 $\lim_{n\to\infty} a_n x=\infty$. 于是, 对任意 $x\in C$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n x)=0.$$

另一方面, 令 $0<\varepsilon<|f(1)|$, 则对每一正整数 n, 当 $x=1/n!$ 时, 有

$$|f(a_n x)|=|f(1)|>\varepsilon.$$

因此, $\{f(a_n x)\}$ 在 C 上不一致收敛.

14. 两个一致收敛的函数序列, 其乘积序列不一致收敛.

在 R^1 上分别取

$$f_n(x)=x,\quad g_n(x)=1/n,\quad n=1,2,\cdots.$$

这时 $\{f_n(x)\}$ 在 R^1 上一致收敛于 x, $\{g_n(x)\}$ 在 R^1 上一致收敛于 0. 但是, 乘积序列 $\{f_n(x)g_n(x)\}=\{x/n\}$ 在 R^1 上不一致收敛于 0.

应当注意, 如果两个函数序列在它们共同的定义域 D 上既有界而又一致收敛, 那么乘积序列在 D 上也一致收敛. 因此, 上述反例之所以成为可能, 是由于其中至少一个序列在所论的定义域上是无界的.

15. 一个连续函数序列 $\{f_n\}$, 它在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f, 然而, f_n 的弧长的极限不等于 f 的弧长.

在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如次:

当 $x=k/n$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 时, 令 $f_n(x)=0$; 而当 $x=k/(2n)$ $(k=1,3,\cdots,2n-1)$ 时, 令 $f_n(x)=1/n$; 在 f_n 尚未得到定义的各个小区间上, 令 f_n 为线性函数并使 f_n 连续. 由于 $|f_n(x)|=f_n(x)\leqslant 1/n$, 因而 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于恒等于零的函数 f.

另一方面, 因为一个等边三角形的两边的长度之和是另一边长度的二倍, 所以每个 f_n 的弧长都等于 2 (参看图 5), 从而其极限也是 2. 但 $f(x)\equiv 0$ 在 $[0,1]$ 上的弧长是 1, 因此二者并不相等.

16. 通项一致趋于零但不一致收敛的函数项级数.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$, $0\leqslant x<1$, 由于在 $[0,1)$ 上恒有 $x^n/n<1/n$, 所以此级数的通项 x^n/n 在 $[0,1)$ 上一致地趋于零. 又因为 $x^n/n\leqslant x^n$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[0,1)$ 上是收敛的, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 在 $[0,1)$ 上也是收敛的. 但是, 它在 $[0,1)$ 上

[①] Schneider, H., *Nonuniform convergence. Amer Math Monthly*, vol. 65 (1958), 635.

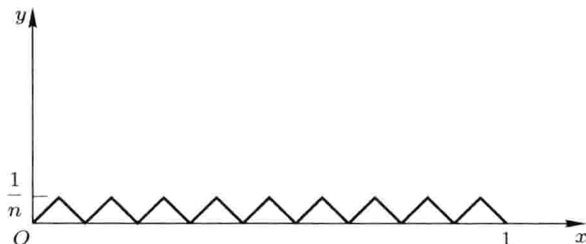


图 5

并不一致收敛. 为证明这一断语, 我们先给出一个关于判别不一致收敛的命题如下 (参看 [7], p.648): 若对每一 $n, s_n(x)$ 在 $x=c$ 左连续, 但数列 $\{s_n(c)\}$ 发散, 那么对任意的 δ $(0<\delta<c)$, 函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在 $(c-\delta, c)$ 内必定不一致收敛. 我们令

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k/k \quad (n=1,2,\cdots),$$

并注意到 $s_n(1)=\sum_{k=1}^{n} 1/k$ $(n=1,2,\cdots)$ 发散, 于是, 由上述命题可知, 对任意 δ $(0<\delta<1)$, 函数序列 $\{s_n\}$ 在 $(1-\delta, 1)$ 内必定不一致收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ 在 $[0,1)$ 上也不一致收敛.

17. 通用的连续函数序列.

$[0,1]$ 上的连续函数序列 $\{h_n(x)\}$ 叫作通用的, 是指对于 $[0,1]$ 上任一连续函数 $f(x)$, 在 $\{h_n(x)\}$ 中恒有一子函数序列 $\{h_{n_k}(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 若 $I \leqslant f(x) \leqslant S$, 则还可取 $h_{n_k}(x)$ 适合

$$I \leqslant h_{n_k}(x) \leqslant S.$$

现在我们着手构造一个通用的连续函数序列.

设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 从而它在 $[0,1]$ 上有界, 令其上界为 S, 下界为 I. 对任给的 $\varepsilon>0$, 取充分大的正整数 k, 使当 $|x-x'|<\frac{1}{k}$ 时, 就有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

对于整数 ν $(\nu=0,1,2,\cdots,k)$, 取有理数 r_ν 使

$$0<\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-r_\nu\right|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

作折线函数

$$h(x)=r_\nu+(r_{\nu+1}-r_\nu)(kx-\nu) \quad (\nu \leqslant kx \leqslant \nu+1, \nu=0,1,2,\cdots,k+1).$$

则在区间 $[\frac{\nu}{k}, \frac{\nu+1}{k}]$ 上, 成立着

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)| &\leqslant \left|f(x)-f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-h\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\left|h\left(\frac{\nu}{k}\right)-h(x)\right| \\ &<\frac{\varepsilon}{5}+\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-r_\nu\right|+|(r_{\nu+1}-r_\nu)(kx-\nu)| \\ &<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+|r_{\nu+1}-r_\nu|.\end{aligned}$$

最后的项小于 $\left|f\left(\frac{\nu+1}{k}\right)-f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\frac{2}{5}\varepsilon<\frac{3}{5}\varepsilon$. 因此在 $[0,1]$ 上 $|f(x)-h(x)|<\varepsilon$. 取 $|r_\nu|<\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|$, 则 $h(x)$ 又满足

$$I\leqslant h(x)\leqslant S.$$

此种折线函数 $h(x)$ 由其"顶点"之值 $r_0,r_1,\cdots,r_k$ 决定. 有理点

$$\{(r_0,r_1,\cdots,r_k)\}$$

为一可数集, 一切 $h(x)$ 也成一可数集. 给 k 以 $1,2,3,\cdots$, 又给 ε 以 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$, 得一函数序列

$$h_1(x),h_2(x),h_3(x),\cdots.$$

对于连续函数 $f(x)$, 正数 ε 及正整数 N, $\{h_n(x)\}$ 中必有子列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 适合

$$|h_{n_\nu}(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \nu>N.$$

至此, 我们构造了一个通用的连续函数序列 $\{h_n(x)\}$, 使对定义在 $[0,1]$ 上的任一连续函数 $f(x)$, $\{h_n(x)\}$ 中有一子函数序列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 若 $I\leqslant f(x)\leqslant S$, 则可使 $h_{n_\nu}(x)$ 适合

$$I\leqslant h_{n_\nu}(x)\leqslant S.$$

18. 一个一致收敛的函数项级数, 具有不一致收敛的重排.

下面的例子是由 Bôcher [47] 作出的.

考虑级数

$$x^2-x^2+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}-\cdots,$$

易见, $s_{2n}(x)=0$, $s_{2n+1}(x)=x^2/(1+x^2)^n$, 所以 $s_{2n+1}(x)<1/n$. 由此可知, 这个级数在任何区间 $(-A,B)$ 上都一致收敛于 0, 此处 $A>0,B>0$.

我们考虑重排后的级数

$$\begin{aligned}&x^2-x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\frac{x^2}{(1+x^2)^4}\\&-\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-3}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-2}}-\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}+\cdots,\end{aligned}\tag{1}$$

不难看出,

$$\begin{aligned}S_{3n-1}(x)&=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-3}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-2}}\\&=\frac{(1+x^2)^{n-1}-1}{(1+x^2)^{2n-2}},\end{aligned}$$

而对 $x_n=\pm(2^{\frac{1}{n-1}}-1)^{\frac{1}{2}}$, 有 $S_{3n-1}(x_n)=\frac{1}{4}$, 因此, 重排后的级数 (1) 在 $(-A,B)$ 上不一致收敛.

19. 一个一致收敛的函数项级数, 却无处绝对收敛.

令

$$a_k(x)=\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k},\quad -\infty<x<+\infty,\quad k=1,2,\cdots.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ 是交错级数, 而且对每一 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|a_k(x)| > |a_{k+1}(x)|, \quad \lim_{k\to\infty} a_k(x) = 0,$$

因而该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 设其和为 $s(x)$:

$$s(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+4} + \cdots.$$

令

$$b_n(x) = \frac{1}{x^2+(2n-1)} - \frac{1}{x^2+2n},$$

则有 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$. 由于

$$b_n(x) = \frac{1}{[x^2+(2n-1)][x^2+2n]} \leqslant \frac{1}{(2n-1)2n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)2n$ 收敛, 因此, 根据级数一致收敛的 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

兹证级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(x^2+k)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处不收敛. 为此, 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 并取正整数 N 使 $N \geqslant x_0^2$. 于是, 当 $k \geqslant N$ 时, 就有

$$\frac{1}{x_0^2+k} \geqslant \frac{1}{N+k} \geqslant \frac{1}{2k}.$$

因为级数 $\sum_{k\geqslant N} \frac{1}{2k}$ 是发散的, 所以级数 $\sum_{k\geqslant N}^{\infty} \frac{1}{x_0^2+k}$ 也是发散的. 因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处发散.

20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对并一致收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 并不一致收敛.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

易见,

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = (1-x)\frac{-x-(-x)^n}{1+x}.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{-x(1-x)}{1+x} = \frac{x(x-1)}{1+x},$$

因此

$$\left| s_n(x) - \frac{x(x-1)}{1+x} \right| = \frac{1-x}{1+x} x^n \leqslant (1-x)x^n.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $1-\varepsilon < x \leqslant 1$ 时,

$$\left| s_n(x) - \frac{x(x-1)}{1+x} \right| \leqslant (1-x)x^n \leqslant 1-x < \varepsilon.$$

而当 $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$ 时,

$$\left| s_n(x) - \frac{x(x-1)}{1+x} \right| \leqslant x^n \leqslant (1-\varepsilon)^n.$$

于是, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时可使 $(1-\varepsilon)^n < \varepsilon$. 因此, 所论级数在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $x(x-1)/(1+x)$.

现在再讨论绝对值级数的收敛性. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n(1-x)x^n| = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = s(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛于 $s(x)$. 然而, 由于和函数 $s(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 可见绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注 容易证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛. 上述反例表明, 这个命题之逆并不成立, 甚至 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛也不行.

21. 一个绝对并一致收敛的函数项级数, 它无任何正项数值优级数.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, 其中

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)} \text{ 或 } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}. \end{cases}$$

我们先来证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛. 由于 $u_n(x) \geqslant 0$, 故只需讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛性. 显然, 对于固定的 x, 若 $x=0$ 或 $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, 则 $u_n(x) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故此时级数之和为 0, 若 $0 < x < 1/2$, 则唯有满足不等式 $1/2^{n+1} < x < 1/2^n$ 的一项 $u_n(x) = \sin^2(2^{n+1}\pi x)/n \neq 0$, 对于其余的 $n, u_n(x) = 0$, 于是所论级数是只有一项组成的, 因此它也是收敛的.

我们再来证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 为此, 令 $u_n(x) = v_n(x)/n$, 其中

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)} \text{ 或 } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \\ \sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}. \end{cases}$$

因为对任何 $x \in [0,1]$ 及正整数 n, 都有

$$0 < \sum_{k=1}^{n} v_k(x) \leqslant 1,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的部分和在 $[0,1]$ 上一致有界; 而序列 $\{1/n\}$ 对每一 x 都是单调的, 且当 $n \to \infty$ 时, 对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 的 x 来说, 它一致地趋于 0, 于是, 由 Dirichlet 判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}v_n(x)$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛.

最后证明, 所论级数不能用收敛的正项数值级数作为其优级数. 事实上, 假若有优级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 存在, 那么对于区间 $[0,1]$ 上的任何 x, 都应该有 $|u_n(x)| \leqslant M_n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛. 设 n 是任意的正整数, 则恒有落在区间 $(1/2^{n+1}, 1/2^n)$ 内的 x

使 $\sin^2(2^{n+1}\pi x) > 1/2$, 对此 x, 将有

$$u_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x) > \frac{1}{2n},$$

故必有 $M_n \geqslant |u_n(x)| > 1/(2n)$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 发散, 这与所设 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 为收敛的优级数发生矛盾.

注 上述反例表明, 对某些函数项级数的一致收敛性, 是不能用 Weierstrass 的 M-判别法去判别的.

22. 一个一致收敛的可微函数序列, 其导函数序列的极限不等于极限函数的导数.

考虑函数序列

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n, \quad -\infty < x < +\infty, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

显然, 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{n}\arctan x^n\right| \leqslant \frac{\pi}{2n},$$

因此当 $n > \pi/(2\varepsilon)$ 时, 就有

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

由此可见, 函数序列 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 0.

另一方面, 我们有

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

应当注意, 如果再加上条件: 导函数序列 $\{f_n'\}$ 在所论区间上一致收敛, 那么必有

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

(参看 [7], p.641). 因此, 想要这种例子得以存在, 导函数序列的极限就不能是一致的.

我们甚至可以构造一个一致收敛的无穷可微函数序列, 其极限函数无处可微. 例如, 设

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b^k \cos(a^k \pi x),$$

此处 $0 < b < 1, a$ 为一正奇数, 且 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, 则对每一 n, $s_n(x)$ 在 R^1 上无穷可微, 且 $\{s_n\}$ 在 R^1 上一致收敛于某个连续函数 $s(x)$. 但是, 极限函数 $s(x)$ 在 R^1 上无处可微 (参看第三章例 29).

注 假若 $\{u_n(x)\}$ 是区间 $[a, b]$ 上的可微函数序列, 那么是否必定存在实数序列 $\{c_n\}, c_n \neq 0$, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛于一个可微函数?

Croft [58] 指出, 若对每一 $n, u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则这样的实数序列 $\{c_n\}$ 是存在的; 若并非对每一 $n, u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则这样的实数序列 $\{c_n\}$ 未必存在. 他构造了一个在 $[0,3]$ 上一致有界的可微函数序列 $\{u_n(x)\}$, 而不存在实数序列 $\{c_n\}$, $c_n \neq 0$, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ 在 $[0,3]$ 上收敛于某个可微函数.

23. 一个一致收敛的无穷可微函数序列, 其导函数序列无处收敛.

设 $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}, n = 1,2,\cdots$, 则 f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷可微, 且 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于零. 另一方面,

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx, \quad n = 1,2,\cdots,$$

显然, $\{f_n'\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不收敛.

24. 一个非一致收敛的可微函数序列, 其导函数序列的极限等于极限函数的导数.

令

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}, \quad 0 \leqslant x < 1,$$

则

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

又

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \ln\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)' = \frac{1}{1-x}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)'.$$

然而, 函数序列 $\{s_n\}$ 在 $[0,1)$ 上并不一致收敛 (参看例 16).

25. $[0,+\infty)$ 上的一个一致收敛于零的广义 (R) 可积函数序列 $\{f_n\}$, 而使数列 $\{\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\}$ 发散.

在 $[0,+\infty)$ 上如下定义函数序列:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 0 \leqslant x \leqslant n^2, \\ 0, & x > n^2, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛于 0, 且对每一 n, f_n 在 $[0,+\infty)$ 上都是广义 (R) 可积的. 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

26. $[1,+\infty)$ **上的一个一致收敛的广义** (R) **可积函数序列, 其极限函数并不广义** (R) **可积.**

在 $[1,+\infty)$ 上定义函数 f_n 及 f 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x, & 1 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & x > n, \end{cases} \qquad f(x) = 1/x.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [1,+\infty)$ 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 f. 又对每一 n, f_n 在 $[1,+\infty)$ 上都是广义 (R) 可积的. 但是, f 在 $[1,+\infty)$ 上并不广义 (R) 可积.

注 容易证明, 对于一致收敛的 (R) 可积函数序列, 其极限函数也是 (R) 可积的. 上述反例表明, 对于广义 (R) 积分而言, 相应的命题并不成立.

第七章

点集的测度

---

0. 引言.

这一章例子处理的是 R^1 中点集的 Lebesgue 测度, 也涉及 Borel 测度, 基本定义和性质给出如下:

设 G 为 R^1 中的非空有界开集, 则 G 可表为:

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k),$$

其中 (α_k,β_k) 等互不相交, 它们是 G 的构成区间. 我们规定开集 G 的测度为它的一切构成区间的长度之和, 并记为 mG :

$$mG=\sum_k(\beta_k-\alpha_k).$$

不难看出, $mG<+\infty$.

设 F 为 R^1 中的有界闭集, 任取一个包含 F 的开区间 (a,b), 令 $G=(a,b)\setminus F$, 则 G 为有界开集. 定义闭集 F 的测度为

$$mF=b-a-mG.$$

可以证明, F 的测度与区间 (a,b) 的选择无关.

设 E 是 R^1 中的有界集, 所有包含 E 的开集的测度的下确界称为 E 的外测度, 并记为 m^*E :

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG.$$

所有含于 E 中的闭集的测度的上确界称为 E 的内测度, 并记为 m_*E :

$$m_*E=\sup_{F\subset E}mF.$$

易见, $m_*E\leqslant m^*E$.

设 E 为有界集, 当 $m_*E = m^*E$ 时, 称 E 为 Lebesgue 可测的, 简称 E 为 (L) 可测集或可测集. 这时 E 的外测度或内测度称为 E 的测度, 并记为 mE.

以上我们定义了有界集的 (L) 测度. 如果 E 是 R^1 中的无界集, 而且它与任何开区间之交是可测的, 就称 E 是 (L) 可测的, 简称 E 是可测的, 其测度定义为

$$\lim_{\alpha\to+\infty} m\{(-\alpha,\alpha)\cap E\},$$

仍以 mE 表示 E 的 (L) 测度. 当 E 可测时, 这个极限恒存在, 但 mE 可能为有限也可能为无穷大. 当 E 为有界可测集时, 此极限值与前面定义的测度相一致.

可测集 (有界或无界) 的性质:

1° E 可测当且仅当 E^c 可测.

2° 设 E_1, E_2 是两个可测集, $E_1 \subset E_2$, 则

$$mE_1 \leqslant mE_2.$$

3° 设 E_1, E_2 是两个可测集, 则 $E_1 \diagdown E_2$ 也可测. 若 $E_2 \subset E_1$, 且 $mE_1 < \infty$, 则

$$m(E_1 \diagdown E_2) = mE_1 - mE_2.$$

4° 设 $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, 每个 E_k 都可测, 则 E 也可测. 又如果 E_k 等互不相交, 则还有

$$mE = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k.$$

性质 4° 说明对于可测集来说, 测度是完全可加的.

5° 设 $E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$, 且每个 E_k 都可测, 则 E 也可测.

6° 设 $\{E_n\}$ 是渐张的 (即, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$) 可测集序列, 令 $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则对任意点集 T, 有

$$m^*(T\cap E) = \lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n).$$

特别有, 诸集 E_n 之并的测度等于 E_n 的测度当 $n\to\infty$ 时的极限:

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

7° 设 $\{E_n\}$ 是渐缩的 (即, $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$) 可测集序列, 令 $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, 则当 $m^*T < \infty$ 时, 有

$$m^*(T\cap E) = \lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n).$$

特别有, 当 $mE_1 < \infty$ 时, 诸集 E_n 之交的测度等于 E_n 的测度当 $n\to\infty$ 时的极限:

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

8° 设 E 是可测集, 则存在 G_δ 型集 A 与 F_σ 型集 B, 满足 $A \supset E \supset B$ 且 $mE = mA = mB$.

9° 设 h 为实数, E 为 R^1 的子集, 对于 $x \in E$, 令 T_h 为平移变换, $T_h: x \to x+h$, 并令

$$T_hE = \{T_hx : x \in E\},$$

则称它为E 的 h 平移变换. 对于任意点集 E, T_hE 的内、外测度都保持不变, 从而当 E 可测时, T_hE 也可测, 且有

$$m(T_hE) = mE.$$

这种性质称为 Lebesgue 测度关于平移的不变性.

10° 不可测集是存在的 (参看例 15). 由此不难推出, 若 $m^*E > 0$, 则 E 必含有不可测的子集.

凡属可以从开集出发, 用取余集, 取有限或可数个集的并或交的手续而得到的集, 统称为 Borel 集或 Borel 可测集, 简称 (B) 可测集.

11° (B) 可测集必是 (L) 可测集, 其逆不真 (参看例 34).

关于点集测度的上述性质的证明, 可参看 [8], [14] 和 [27].

本章的某些例子, 还需要同胚映射的概念. 设 A, B 都是 R^1 的子集, f 是由 A 到 B 上 (即, $f(A) = B$) 的一对一的映射, 如果 f 及其逆映射 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 是 A 到 B 上的同胚映射或拓扑映射. 如果存在从 A 到 B 上的同胚映射, 则称 A 与 B 是同胚的.

1. 一个渐缩的可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $m(\lim_{n\to\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} mE_n$.

在 R^1 中取 $E_n = \{x : x \geqslant n\}$, 则 $mE_n = +\infty$, 而 $m(\lim_{n\to\infty} E_n) = 0$, 所以

$$m\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

注 若再加上条件 $mE_1 < +\infty$, 则 $m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} mE_n$ (参看本章的引言).

2. 一个含于有限区间中的可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty} mE_n$ 存在, 但 $m(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n) \neq m(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n)$.

集序列 $\{E_n\}$ 的上极限和下极限分别定义并表示为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m.$$

序列 $\{E_n\}$收敛当且仅当 $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$, 这时序列 $\{E_n\}$ 收敛于这个公共值, 记作 $\lim_{n\to\infty} E_n$.

我们考察如下的集序列:

$$E_n = \begin{cases} \left(-1-\dfrac{1}{n}, 0\right), & n = 1, 3, 5, \cdots, \\ \left[0, 1+\dfrac{1}{n}\right), & n = 2, 4, 6, \cdots, \end{cases}$$

显然, $E_n \subset (-2,2)(n=1,2,\cdots)$. 又

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \\ &= \left[\bigcap_{n\text{ 为奇数}}\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n+1}\right)\right]\bigcap\left[\bigcap_{n\text{ 为偶数}}\left(-1-\frac{1}{n+1},1+\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= [-1,1],\end{aligned}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{0\} = \{0\}.$$

因此

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) = 2 \neq m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) = 0.$$

虽然 $\lim_{n\to\infty} E_n$ 不存在, 但是 $\lim_{n\to\infty} mE_n$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

3. 一个可测集序列 $\{E_n\}$, 使 $m(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n) < \overline{\lim}_{n\to\infty} mE_n$.

取 $E_n = [n-1,n]$, 则 $mE_n = 1$, 所以 $\overline{\lim}_{n\to\infty} mE_n = 1$. 但是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = \varnothing,$$

所以 $m(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n) = 0$. 因此

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) < \overline{\lim_{n\to\infty}} mE_n.$$

注 容易证明, 若 $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$, 则有

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} mE_n.$$

上述反例说明了在这个命题中, 条件 $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$ 是不可少的.

4. 测度为零的不可数集.

第一章例 31 中的 Cantor 三分集 C 是一个非空完备集, 所以它是一个不可数集. 因为从闭区间 $[0,1]$ 中取走的开集 G 的测度为

$$mG = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

所以

$$mC = m([0,1]\diagdown G) = 1 - 1 = 0.$$

注 容易证明, 有限集或可数集的测度是零. 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

5. 任给实数 a $(0<a<1)$, 在 $[0,1]$ 中可构造一个测度为 a 的完备疏集.

令 $r=(1-a)/(3-2a)$, 则 $0<r<1/3$. 我们先从闭区间 $[0,1]$ 中取走中间长度为 r 的开区间, 第二次从余下的两个闭区间中各自取走中间长度为 r^2 的开区间, 第三次又从余下的四个闭区间中各自取走中间长度为 r^3 的开区间, 如此继续下去. 这样, 全部取走的开区间的总长度为

$$\alpha=r+2r^2+4r^3+\cdots=r[1+2r+(2r)^2+\cdots]=r/(1-2r).$$

于是, 余下之集的测度为

$$1-\alpha=(1-3r)/(1-2r)=a.$$

用这种方法得到的集通常称为*具正测度的* Cantor 集, 它是一个完备疏集.

6. 直线上的一个稠密开集, 它的余集的测度为无穷大.

命 $(-\infty,+\infty)$ 内的全体代数数为

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

对于任给的正数 ε, 令

$$I_n=\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},a_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $G=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个稠密开集, 且

$$mG\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mI_n=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon.$$

因此, 它的余集 $(-\infty,+\infty)\setminus G$ 的测度为无穷大.

注 这个余集是超越数的完备疏集. 于是, 我们得到了一个测度为无穷大的超越数的完备疏集.

7. 一个开集, 它的测度不等于它的闭包的测度.

设 E 为 $[0,1]$ 中具有正测度 a $(0<a<1)$ 的 Cantor 集, 则 $G=[0,1]\setminus E$ 为一开集, 且 $mG=1-a$. 由于 G 在 $[0,1]$ 中稠密, 所以 $\overline{G}=[0,1]$, 从而 $m\overline{G}=1$.

更为有趣的例子可如下作出:

设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的全体有理数, 对于任给的正数 ε, 令

$$I_n=\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

并令 $G=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$, 则 G 为开集, 且 $mG\leqslant\varepsilon$. 显然, G 在 $(-\infty,+\infty)$ 内稠密, 所以 $m\overline{G}=+\infty$.

注 由于有理数在直线上是稠密的, 因而可能会给我们造成一种错觉: "认为取走以每个有理数为中心的开区间后 (不管这种开区间的长度多小), 整个直线似乎就荡然无存了". 上述反例说明了这个结论是不正确的, 其实, 剩下的无理数还可以有如此之多, 使得它们所成之集其测度为无穷大.

8. 一个可数的疏集, 其闭包具有正测度.

设 F 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, E 为 F 的全部邻接区间的端点所成之集, 则 E 为一可数的疏集, 从而 $mE=0$. 又, $\overline{E}=F$, 所以 $m\overline{E}=mF>0$.

9. 使得每个实数都是凝聚点的零测度集.

设 E 为 R^1 的子集, 假如每一个包含 x_0 的开区间 (a,b) 一定也包含 E 中不可数的无限个点, 则称 x_0 为 E 的凝聚点.

现在我们来构造具有所需性质的零测度集. 显然, 一个集的测度为零, 当且仅当它是零测度集. 因此, 我们从 Cantor 三分集 C 出发, 对任一闭区间 $[\alpha,\beta]$, 其中 $\alpha<\beta$, 定义集

$$C_{[\alpha,\beta]}=\{\alpha+(\beta-\alpha)x : x\in C\},$$

则 $mC_{[\alpha,\beta]}=(\beta-\alpha)mC=0$. 由于 C 是完备疏集, 故不难看出, $C_{[\alpha,\beta]}$ 也是完备疏集.

设 B 为全体 $C_{[\alpha,\beta]}$ 集的并集, 这里 α,β 为有理数, 且 $\alpha<\beta$, 则 B 是可数个测度为零的集的并集, 因此, 它也是一个测度等于零的集. 另一方面, 因为每个开区间 I 必定包含一个 $C_{[\alpha,\beta]}$ 集, 而每个 $C_{[\alpha,\beta]}$ 又都是不可数集, 所以每个实数必然是 B 的一个凝聚点.

10. $[0,1]$ 中测度等于 1 的第一纲集.

设 A_n 为 $[0,1]$ 中测度等于 $(n-1)/n$ 的任一 Cantor 集, $n=1,2,\cdots$, 再设 $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$. 因为 A_n 是疏集, $n=1,2,\cdots$, 所以 A 是第一纲集. 另一方面, 因为

$$mA_n=(n-1)/n\leqslant mA\leqslant 1\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以 $mA=1$.

11. $[0,1]$ 中测度等于零的第二纲集.

设 A 是例 10 中的第一纲集, 则它的余集 $B=[0,1]\setminus A$ 是第二纲集 (因为如果它是第一纲集, 则区间 $[0,1]$ 将是两个第一纲集的并集, 从而也是第一纲集, 但这是谬误的), 而且 $mB=1-mA=0$.

12. $[0,1]$ 内一个两两不相交的完备疏集序列, 其并集的测度为 1.

先在 $[0,1]$ 内作一测度为 $1/2$ 的完备疏集 E_1. 设 E_1 的各个邻接区间为 $(\alpha_{1i},\beta_{1i}), i=1,2,\cdots$, 再在每个 (α_{1i},β_{1i}) 中作一测度为 $(\beta_{1i}-\alpha_{1i})/2$ 的完备疏集 E_{1i}, 则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{1i}\right)=\frac{1}{2^2}.$$

易见, $E_2=E_1\cup(\cup_{i=1}^{\infty}E_{1i})$ 也是完备疏集, 且

$$mE_2=mE_1+m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{1i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

再次, 在 E_2 的每个邻接区间 $(\alpha_{2i}, \beta_{2i})$ 内作一测度为 $(\beta_{2i}-\alpha_{2i})/2$ 的完备疏集 E_{2i}, 那么

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2i}\right)=\frac{1}{2^3}.$$

于是, 集 $E_3=E_2\cup(\cup_{i=1}^{\infty}E_{2i})$ 也是完备疏集, 且

$$mE_3=mE_2+m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2i}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

继续这个过程以至无穷, 我们就得到下面可数个两两不相交的完备疏集:

$$\begin{gathered}E_1,\ E_{11},\ E_{12},\cdots,E_{1i},\cdots,\\ E_{21},\ E_{22},\ E_{23},\cdots,E_{2i},\cdots,\\ \cdots,\\ E_{k1},\ E_{k2},\ E_{k3},\cdots,E_{ki},\cdots,\\ \cdots.\end{gathered}$$

同时,

$$mE_1=\frac{1}{2},\quad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{1i}\right)=\frac{1}{2^2},\quad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2i}\right)=\frac{1}{2^3},$$

$$\cdots,\quad m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ki}\right)=\frac{1}{2^{k+1}},\cdots.$$

因为上述诸集两两不相交, 所以这些集的并集的测度等于它们的测度之和. 因此,

$$\begin{aligned}&m\left(E_1\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{1i}\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2i}\right)\cup\cdots\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ki}\right)\cup\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots=1.\end{aligned}$$

这样一来, 上面作出的完备疏集序列 E_1, E_{ki} $(k=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots)$ 满足所需的条件.

13. $[0,1]$ **中测度为零的不可数的稠密集**

设 E 是例 12 中的两两不相交的可数个完备疏集的并集, 则 $[0,1]\setminus E$ 是 $[0,1]$ 中的不可数的稠密集, 且 $m([0,1]\setminus E)=1-1=0$.

14*. $[0,1]$ **中的一个可测集** E, **使对任一非空开区间** $I\subset[0,1]$, **恒有** $m(I\cap E)>0, m(I\cap E^c)>0$.

设 $\{\lambda_n\}$ 是小于 1 的正数序列, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<+\infty.$$

对每一正整数 n, 在 $[0,1]$ 内作出闭的疏集 A_n, 使 $mA_n=\lambda_n$ (参看例 6). 在作集 A_n 时, 我们总是可以假定被删去的开区间 (即 A_n 的邻接区间) (p_i,q_i) 的长度

$q_i - p_i$ 小于 $1/n$, 这是因为, 假若对某个开区间 (p_i, q_i) 有 $q_i - p_i \geqslant 1/n$, 那么我们总是可以插入有限个分点而使每个子区间的长度都小于 $1/n$, 再把这些分点并入 A_n, 则 A_n 仍为闭的疏集且测度不变.

现在我们来构造集序列 $\{B_n\}$. 令 $B_1 = A_1$. 在 B_1 的每个邻接区间 (a_i, b_i) 的闭包 $[a_i, b_i]$ 中作出一个集, 它是集 A_2 通过由 $[0,1]$ 变到 $[a_i, b_i]$ 上的一一映射 $y = (b_i - a_i)x + a_i$ $(x \in A_2)$ 而得到的. 对 B_1 的每个邻接区间的闭包, 都按上述方式构造一个集, 这种集的全体和 B_1 的并集记作 B_2. 在 B_2 的每个邻接区间 (a_i, b_i) 的闭包 $[a_i, b_i]$ 中作出一个集, 它是集 A_3 通过一个由 $[0,1]$ 映到 $[a_i, b_i]$ 上的一一映射 $y = (b_i - a_i)x + a_i$ $(x \in A_3)$ 而得到的. 这种集的全体和 B_2 的并集记作 B_3. 如此继续以至无穷, 于是我们得到一个集序列 $\{B_n\}$. 令

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

我们将要证明, 集 E 具有所需的性质. 为此, 任取非空开区间 $I \subset [0,1]$. 由于 A_n 的每个邻接区间的长度都小于 $1/n$, 因而由 B_n 的构造法可知, B_n 的每个邻接区间的长度也都小于 $1/n$. 于是, 我们可以选取自然数 m, 使 B_m 的某个邻接区间 (p, q) 完全包含在开区间 I 之中. 这样一来, $I \cap E$ 就包含了一个由 A_{m+1} 通过映射 $y = (q-p)x + p$ $(x \in A_{m+1})$ 而得到的集. 因为 $mA_{m+1} \neq 0$, 所以这个集的测度也不等于零 (参看 [82], 中译本 pp.67—69), 从而

$$m(I \cap E) > 0.$$

另一方面, $[p, q] \cap B_{m+1}$ 是由 A_{m+1} 通过映射 $y = (q-p)x + p$ $(x \in A_{m+1})$ 而得到的集, 因而 (参看 [82], 中译本 pp.67—69)

$$m([p, q] \cap B_{m+1}) = (q-p)mA_{m+1} = (q-p)\lambda_{m+1}.$$

由此可知

$$m([p, q] \setminus [p, q] \cap B_{m+1}) = (1 - \lambda_{m+1})(q-p).$$

类似地, 有

$$m([p, q] \setminus [p, q] \cap B_{m+2}) = (1 - \lambda_{m+1})(1 - \lambda_{m+2})(q-p),$$

等等. 因为 $\{B_n\}$ 是渐张的集序列, 所以

$$E = \lim_{n \to \infty} B_n,$$

从而

$$[p, q] \setminus [p, q] \cap E = \lim_{n \to \infty} ([p, q] \setminus [p, q] \cap B_n),$$

于是得到

$$m([p, q] \setminus [p, q] \cap E) = \lim_{n \to \infty} m([p, q] \setminus [p, q] \cap B_n).$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<+\infty$, 所以 $\prod_{n=m+1}^{\infty}(1-\lambda_n)\neq 0$ (参看 [7], p.623). 由此可知

$$m([p,q]\setminus[p,q]\cap B_{m+k})=(1-\lambda_{m+1})(1-\lambda_{m+2})\cdots(1-\lambda_{m+k})(q-p)$$
$$>\prod_{n=m+1}^{\infty}(1-\lambda_n)(p-q)>0,$$

从而

$$m([p,q]\setminus[p,q]\cap E)>0.$$

因为 $(p,q)\subset I$, 所以

$$m(I\cap E^c)>0.$$

注 Grossman[79] 也构造了 R^1 中的一个可测集 E, 使对任何非空开区间 I, 有

$$0<m(E\cap I)<mI,$$

即 $m(E\cap I)>0$, $m(E^c\cap I)>0$.

15. 不可测集

将 $[-1/2,1/2]$ 中所有的点以下法分类, 两点 x 与 y, 当且仅当 $x-y$ 是有理数时, 称 x 与 y 属于同一类. 设 $x\in[-1/2,1/2]$, 将 $[-1/2,1/2]$ 中具有形式 $x+r$ (r 表示有理数) 的点的全体归为一类 $K(x)$. 这样, 对于一个 x, 有一类 $K(x)$ 与之对应, 且 $x\in K(x)$.

其次可证不同的两类 $K(x)$ 和 $K(y)$ 是不相交的. 因为如果它们相交, 那么有 $z\in K(x)\cap K(y)$. 因而

$$z=x+r_x=y+r_y,$$

其中 r_x 和 r_y 都是有理数, 故得

$$y=x+r_x-r_y.$$

现在, 假定 $t\in K(y)$, 则由

$$t=y+r=x+(r_x-r_y+r)=x+r',$$

得 $t\in K(x)$, 从而 $K(y)\subset K(x)$. 同理可得 $K(x)\subset K(y)$, 因此 $K(x)=K(y)$. 此与假定相冲突.

将 $[-1/2,1/2]$ 给以上述的分类以后, 在每一类中任意选定一点作为代表元素, 这种点的全体记它作 A. 下面证明 A 是一个不可测的集.

设 $[-1,1]$ 中的有理点的全体是

$$r_0=0,r_1,r_2,r_3,\cdots.$$

设 A 经平移

$$\varphi_k(x)=x+r_k$$

而得集 A_k. 若 $x\in A$, 则 $\varphi_k(x)\in A_k$; 又若 $x\in A_k$, 则 $x-r_k\in A$. 特别是 $A_0=A$. 由 Lebesgue 内、外测度关于平移的不变性, 得到

$$m_*A_k=m_*A=\alpha,\quad m^*A_k=m^*A=\beta.$$

先证

$$\beta > 0. \tag{1}$$

为此首先证明

$$[-1/2, 1/2] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{2}$$

事实上, 当 $x \in [-1/2, 1/2]$ 时 x 必属于上述分类中的某一类, 设此类的代表元素是 x_0, 则 $x - x_0$ 是一个有理数并且一定含在 $[-1, 1]$ 中, 因此

$$x - x_0 = r_k,$$

而 $x \in A_k$. 于是 (2) 被证明.

由于

$$1 = m^*[-1/2, 1/2] \leqslant m^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^* A_k,$$

即

$$1 \leqslant \beta + \beta + \beta + \cdots,$$

知 (1) 是真的.

另一方面, 容易证明

$$\alpha = 0. \tag{3}$$

事实上, 当 $n \neq m$ 时,

$$A_n \cap A_m = \varnothing. \tag{4}$$

何以呢? 因为如果有点 $z \in A_n \cap A_m$, 则

$$x_n = z - r_n \quad 和 \quad x_m = z - r_m$$

(显然是不同的) 都属于 A 而属于不同的类.

此事由

$$x_n - x_m = r_n - r_m$$

是一个有理数而知为不可能. 由是得 (4).

又对于任意的 k,

$$A_k \subset [-3/2, 3/2]$$

(因为 $x \in A_k$ 含有 $x = x_0 + r_k$, 其中 $|x_0| \leqslant 1/2, |r_k| \leqslant 1/2$). 由是

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-3/2, 3/2]. \tag{5}$$

由 (5) 及 (4), 得到 (参看 [27], 中译本 pp.73—74)

$$3 = m_*[-3/2, 3/2] \geqslant m_*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k,$$

从而

$$\alpha+\alpha+\alpha+\cdots \leqslant 3,$$

故得 $\alpha=0$. 这就是 (3).

将 (1) 和 (3) 合并得

$$m_*A < m^*A,$$

所以 A 是一个不可测集.

如果我们不是从闭区间 $[-1/2,1/2]$ 出发, 而是从任何一个具有正测度的集 E 出发, 施行同样的手续而给以分类, 那么就知道 E 中存在着不可测的子集 A. 因此, 凡具有正测度的集合含有不可测的子集.

注 其实, 还存在不可测的 Hamel 基.

集 $H \subset R^1$ 叫作 Hamel 基, 如果对于任一 $x \in R^1$, 存在有理数 $\{r_\alpha\}$ 及 $\{h_\alpha\} \subset H$, 使

$$x=\sum_\alpha r_\alpha h_\alpha,$$

其中和数是有限项的, 且表示法是唯一的.

可以证明, 若 H 是可测的 Hamel 基, 则必有 $mH=0$. 因此, 如果 H 是 Hamel 基, 且 $m^*H>0$, 那么 H 必定不可测.

外测度大于零的 Hamel 基的存在性首先是由 Burstin 证明的. Abian [35],[36] 给出了一个不可测 Hamel 基的简单例子.

16. 一个两两不相交的集序列 $\{A_n\}$, 使 $m^*(\cup_{n=1}^\infty A_n) < \sum_{n=1}^\infty m^*A_n$.

设 $\{A_n\}$ 是例 15 中两两不相交的集序列, 则对每一 $n, m^*A_n=\beta>0$, 且

$$A_n \subset [-3/2,3/2],$$

因此, $\cup_{n=1}^\infty A_n \subset [-3/2,3/2]$. 由此得到

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leqslant 3.$$

然而 $\sum_{n=1}^\infty m^*A_n=+\infty$, 所以

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) < \sum_{n=1}^\infty m^*A_n.$$

注 测度具有完全可加性. 上述反例说明了外测度无此性质.

17. 一族可测集, 其并集不可测.

设 A 为一不可测集 (参看例 15), 对每一 $a \in A$, 单点集 $\{a\}$ 是可测的, 但其并集

$$\bigcup_{a\in A}\{a\}=A$$

并不可测.

18. 一族可测集, 其交集不可测.

设 A 为一不可测集, 则其余集 A^c 也是不可测集, 而单点集 $\{a\}$ $(a\in A)$ 是可测集, 从而它的余集 $\{a\}^c$ 也是可测集. 但是, 交集

$$\bigcap_{a\in A}\{a\}^c=\left(\bigcup_{a\in A}\{a\}\right)^c=A^c$$

并不可测.

注 可数个可测集的并与交仍是可测集. 例 17 与 18 说明了不可数个可测集的并与交不必是可测集.

19*. 一个有界的零测度集 E, 使 $E+E$ 为一不可测集.

设 A, B 为二集, α 为数, 令

$$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\},\quad A+\alpha=\{x+\alpha:x\in A\},\quad \alpha A=\{\alpha x:x\in A\}.$$

可以构造一个有界的零测度集 E, 使 $E+E$ 为一不可测集. 下面的构造法属于 Rubel [139].

我们用 H 代表包含在区间 $[0,1]$ 中的一个 Hamel 基, 使 $mH=0$. 于是, 对每一实数 $x\neq 0$, 可唯一地表成

$$x=\sum_j r_jh_j\quad (r_j\neq 0)\tag{1}$$

的形式, 这里, 和式是有限项的, r_j 为有理数, $h_j\in H$. 满足上述条件的 Hamel 基是存在的 (参看 [150]).

令

$$E_o=H\cup(-H)\cup\{0\},$$

然后对非负整数 n, 归纳地定义 E_{n+1} 为

$$E_{n+1}=E_n+E_n,$$

于是, E_n 是 E_0 中的一切最多 2^n 个元素之和所成之集.

兹证存在非负整数 n_0, 使 $mE_{n_0}=0$, $m^*E_{n_0+1}>0$. 事实上, 令

$$J=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}E_n.$$

假若对每一 n, 均有 $mE_n=0$, 那么 $mJ=0$. 由于对任一实数 x, (1) 式可改写为

$$x=\frac{1}{b}\{a_1h_1+a_2h_2+\cdots+a_nh_n\},$$

这里, b 和 $a_1,\cdots,a_n$ 均为整数, 因而当 $2^n\geqslant|a_1|+\cdots+|a_n|$ 时, 就有

$$x\in b^{-1}E_n\subset J.$$

由此可知, $J=R^1$, 从而 $mR^1=0$, 这显然是荒谬的. 因此, 并非每个 E_n 都是零测度集.

令 $n=n_0+1$ 是第一个使 $m^*E_n>0$ 的整数, 则 E_n 必为不可测集. 事实上,

假若 E_n 可测, 则据 Steinhaus 定理, E_n 的差集

$$D(E_n)=\{x-y:x\in E_n,y\in E_n\}$$

将包含一个含有原点的开区间 I (参看 [82], 中译本 pp.72—73). 于是由 $E_k=-E_k$ 可知, $E_{n_0+2}=E_{n_0+1}+E_{n_0+1}$ 包含开区间 I. 但

$$I+I+\cdots=R^1,$$

这蕴涵了表达式 (1) 中的 r_j 均可取作整数. 这显然是不可能的, 因为若 $h\in H$, 则 $\frac{1}{2}h$ 就不能唯一地表为 (1) 的形式了. 因此, E_n 不可测, 故 $E=E_{n_0}$ 具有所需的性质.

20*. R^1 的一个子集 A, 使 A 和 A^c 的每一可测子集其测度均为零.

令

$$G=\{x:x=r+n\sqrt{2},r\text{ 为有理数}, n\text{ 为整数}\},$$

$$G_0=\{x:x=r+2n\sqrt{2},r\text{ 为有理数}, n\text{ 为整数}\},$$

$$G_1=\{x:x=r+(2n+1)\sqrt{2},r\text{ 为有理数}, n\text{ 为整数}\}.$$

易见, $G_0\cap G_1=\varnothing$, $G_1=G_0+\sqrt{2},G=G_0\cup G_1$. 将 R^1 中所有的点以下法分类, 两点 x 与 y, 当且仅当 $x-y\in G$ 时, 称 x 与 y 属于同一类. 容易证明, 不同的两类是不相交的.

将 R^1 给以上述的分类以后, 在每一类中任意选定一点作为代表元素, 这种点的全体记作 E. 令 $A=E+G_0$, 即

$$A=\{e+g_0:e\in E,g_0\in G_0\}.$$

兹证 A 的每一可测子集 B, 均有 $mB=0$. 事实上, 假若存在 A 的某个可测子集 B 而有 $mB>0$, 则存在某个开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 使

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\{x-y:x\in B,y\in B\}$$

(参看 [82], 中译本 pp.72—73). 由于 $B\subset A$, 故

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\{x-y:x\in A,y\in A\}.$$

因为 G_1 在 R^1 中稠密, 故 $G_1\cap(-\varepsilon,\varepsilon)\neq\varnothing$, 从而

$$G_1\cap\{x-y:x\in A,y\in A\}\neq\varnothing.$$

然而这是不可能的, 因为 $\{x-y:x\in A,y\in A\}$ 的每一元素可表成 $e_1-e_2+g_0$ 的形式, 其中 $e_1,e_2\in E,g_0\in G_0$, 所以它不能属于 G_1 (若 $e_1-e_2+g_0=g_1\in G_1$, 则可推出 $e_1=e_2,g_0=g_1$, 从而 $G_0\cap G_1\neq\varnothing$, 不合). 因此, A 的每一可测子集其测度必为零.

其次, 不难看出 $A^c=E+G_1$. 于是, $A^c=A+\sqrt{2}$. 由此可见, A^c 的每一可测子集必可表成 $B+\sqrt{2}$ 的形式, 其中 B 是 A 的某个可测子集. 因此, A^c 中不存在具有正测度的可测子集.

容易看出, A 是不可测集.

注 在自然数集的势 $\aleph_0$ 和实数集的势 $\aleph$ 之间是否有势 μ 适合

$$\aleph_0 < \mu < \aleph,$$

这是尚未解决的一个难题, Cantor 预料没有这种 μ, 这是 Cantor 的假设. 人们往往称此假设为"连续统的假设."

Sierpiński [154] 指出, 在连续统的假设下, 存在不可测的实数集, 它的每个可测子集都是可数的, Dressler 和 Kirk [68] 进一步作出了这种例子.

21. 对每一有理数 a, 使 $\{x : f(x) = a\}$ 均为不可测集的函数 f.

设 Q 为有理数的全体, f 为具有性质 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 的无处连续函数 (参看第二章例 61). 对每一 $a \in Q$, 可定义 R^1 中的点集

$$M_a = \{x : f(x) = a\}.$$

可以证明, 诸集 M_a 均为不可测集.

假若不然, 不妨设 $M_0 = \{x : f(x) = 0\}$ 为可测集, 其测度为 mM_0. 按定义易知 $M_a = M_0 + a$, 其中 $M_0 + a = \{x + a : f(x) = 0\}$. 显然, 各个 M_a 两两不相交, 且

$$R^1 = \bigcup_{a \in Q} M_a.$$

由此可知 $mM_0 \neq 0$. 其次, 又将证明 mM_0 必为 0 如下:

第一步先证明下列等式成立:

$$A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i} = (A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}) + i, \quad i \in I,$$

其中 $A_i = [i, i+1)$ 为半开区间, I 为整数集.

因为

$$\begin{aligned} x \in (A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i}) &\Longleftrightarrow x \in [0,1) \text{ 及 } f(x) = \frac{1}{n} + i \\ &\Longleftrightarrow 0 \leqslant x < 1 \text{ 及 } f(x-i) = \frac{1}{n} \\ &\Longleftrightarrow -i \leqslant x - i < 1 - i \text{ 及 } x - i \in M_{\frac{1}{n}} \\ &\Longleftrightarrow x - i \in (A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}) + i, \end{aligned}$$

故上式成立, 且由诸 $M_{\frac{1}{n}}$ 及 A_i 的可测性知有

$$m(A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i}) = m(A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}}).$$

于是第二步由

$$R^1 \supset \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{i \in I} M_{\frac{1}{n}+i}$$

知有

$$A_0 = (A_0 \cap R^1) \supset \left\{ A_0 \cap \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{i \in I} M_{\frac{1}{n}+i} \right) \right\}$$
$$= \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{i \in I} (A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i}),$$

故又有

$$1 = mA_0 \geqslant m \left\{ \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{i \in I} (A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i}) \right\}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in I} m(A_0 \cap M_{\frac{1}{n}+i})$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in I} m(A_{-i} \cap M_{\frac{1}{n}})$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} m \left\{ \left(\bigcup_{i \in I} A_{-i} \right) \cap M_{\frac{1}{n}} \right\}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} m(R^1 \cap M_{\frac{1}{n}})$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} mM_{\frac{1}{n}}$$
$$= mM_0 + mM_0 + \cdots,$$

所以 mM_0 又必为 0. 此为矛盾.

22. $[0,1]$ **内的一个不可测集** M, **使** $m_*M = 0$, $m^*M = 1$.

设 $M_a = \{x : f(x) = a\}$ 为例 21 中的集, $A_i = [i, i+1)$. 由例 21 的证明中可知

$$M_0 = \bigcup_{i \in I} (M_0 \cap A_i),$$

由于 M_0 不可测, 故上式右边至少有一个为不可测集. 设 $N_j = M_0 \cap A_j$ 为不可测集, 于是下面的 M 为不可测集:

$$M = \{N_j - j\}, \quad M \subset [0,1],$$

而且 M 中的点 x 相应的函数值为 $f(x) = -j$. 于是由 M 的不可测性 (从而不可数) 及其点相应的函数值恒为 $-j$ 及 f 的性质, 易知 M 的内测度为 0, 外测度为 1.

注 还可进一步作出 R^1 的子集 M, 使对任何可测集 E, 恒有

$$m_*(M \cap E) = 0, \quad m^*(M \cap E) = mE$$

(参看 [82], 中译本 p.74). 由此得到, 每个可测集 E 都包含一个子集, 其内测度等于零而外测度等于 E 的测度.

Galvin 曾经构造出 $[0,1]$ 的一组两两不相交的子集 $\{E_t\}, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 每个 E_t 的外测度都等于 1.

23. 导数几乎处处为零的单调的连续函数.

设 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集. 将 C 的邻接区间 (α_n, β_n), $n = 1, 2, \cdots$, 依下按长度大小进行分类: 第一类是一个区间 $(1/3, 2/3)$, 第二类是两个区间 $(1/9, 2/9), (7/9, 8/9)$, 第三类是四个区间 $(1/27, 2/27), (7/27, 8/27), (19/27, 20/27), (25/27, 26/27)$, 依此类推, 在第 n 类中有 2^{n-1} 个长度为 $1/3^n$ 的区间.

今作函数 $\theta(x)$ 如下:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in (1/3, 2/3), \\ 1/4, & x \in (1/9, 2/9), \\ 3/4, & x \in (7/9, 8/9), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

在第三类的四个区间中, $\theta(x)$ 依次取值 $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$. 一般地, 在第 n 类的 2^{n-1} 个区间中, $\theta(x)$ 依次取值 $1/2^n, 3/2^n, 7/2^n, \cdots, (2^n-1)/2^n$. 这样, $\theta(x)$ 在 $G = \cup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n)$ 上有定义, 它在 G 的每个构成区间 (α_n, β_n) 上为常数, 且限制在 G 上为一递增函数 (参看图 6). 将 $\theta(x)$ 扩充定义到整个区间 $[0,1]$ 上:

$$\theta(x) = \sup_{\substack{t<x \\ t \in G}} \theta(t), \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 1.$$

这样, $\theta(x)$ 是整个区间 $[0,1]$ 上的一个递增函数.

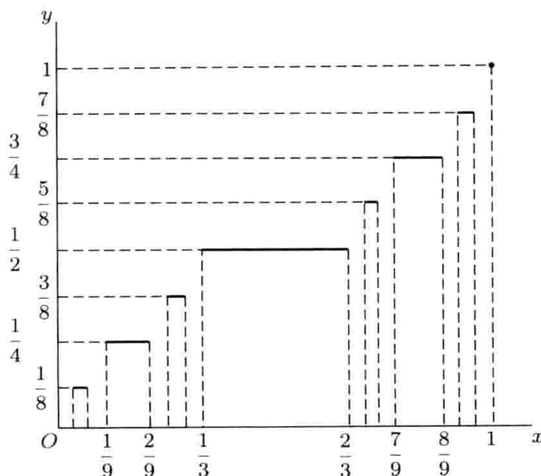


图 6

不难证明, $\theta(x)$ 是一个连续函数. 事实上, 因为 $\theta(x)$ 在 G 上所取的函数值在 $[0,1]$ 中稠密, 所以如果 $\theta(x)$ 在某点 x_0 处不连续, 那么 $(\theta(x_0-), \theta(x_0))$ 或

$(\theta(x_0), \theta(x_0+))$ 中的一切数就将不是 $\theta(x)$ 的函数值, 这与 $\theta(x)$ 的函数值在 $[0,1]$ 中稠密的事实相违背. 因此, $\theta(x)$ 是一递增的连续函数, 并且 $\theta'(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处等于 0 (在 G 中每点当然是 $\theta'(x)=0$).

上面定义的函数 $\theta(x)$ 称为 Cantor 函数.

至于导数几乎处处等于零的严格单调的连续函数, 可参看例 25.

24. 函数 f 和 g 具有相同的导数, 而 f 和 g 并不相差一个常数.

我们知道, 如果 f 和 g 具有相同的有限导数, 那么 f 和 g 相差一个常数. 在这个命题里, 导函数有限这一条件是非常重要的, 如果去掉有限这一条件, 上述命题未必成立. Ruziewicz [143] 有例如下:

(i) 函数之构成.

任取实数 $s \geqslant 1$, 将区间 $[0,s]$ 分成三部分, 取走以 $\frac{s}{2}$ 为中点, 长为 $\frac{1}{3}$ 的开区间 $\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{6}, \frac{s}{2}+\frac{1}{6}\right)$. 将余下的两个闭区间 (长各 $\geqslant \frac{1}{3}$) 还是分成三部分, 取走以被分区间的中点为中点, 长为 $\frac{1}{3^2}$ 的两个开区间 $\left(\frac{s}{4}-\frac{5}{36}, \frac{s}{4}-\frac{1}{36}\right), \left(\frac{3s}{4}-\frac{1}{36}, \frac{3s}{4}+\frac{5}{36}\right)$. 如此继续下去, 以至无穷. 于是, 被取走的开区间的全体为一开集, 记作 G_s; 而剩下来的点的全体为一完备疏集, 记作 P_s, 即 $P_s=[0,s]\setminus G_s$.

于区间 $[0,s]$ 上定义函数 $f_s(x)$, 使在集 P_s 上它的值等于零; 而在构造 P_s 时取走的各个开区间上, $f_s(x)$ 的图形是以这个开区间为直径且位于 x 轴之上的半圆组成. 于是, $y=f_s(x)$ 在 $[0,s]$ 上处处连续. 令

$$F_s(t)=\int_0^t f_s(x)dx,$$

易见, $F_s(t)$ 是 $[0,s]$ 上的一个严格递增的连续函数, $F_s(s)$ 应等于所有半圆面积之和, 即

$$F_s(s)=\frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+2^2\left(\frac{1}{3^3}\right)^2+\cdots\right]=\frac{\pi}{56}.$$

令 $\varPhi_s(u)$ 为 $F_s(t)$ 的反函数, 它是以 $[0,\frac{\pi}{56}]$ 为定义域的递增的连续函数, $\varPhi_s(u)$ 就是所欲求的.

(ii) 导数的计算.

分两种情形讨论.

a) $t_s=\varPhi_s(u)$ 不属于 P_s. 这时, $f_s(t_s)\neq 0$. 因为 $F_s'(t_s)=f_s(t_s)$, 故

$$\varPhi_s'(u)=\frac{1}{F_s'(t_s)}=\frac{1}{f_s(t_s)}. \tag{1}$$

另一方面, 因为 $t_s=\varPhi_s(u)$, 所以 $F_s(t_s)=u$ (对于所有的 $s\geqslant 1$, 这个等式都成立), 从而

$$F_s(t_s)=F_1(t_1), \quad s\geqslant 1. \tag{2}$$

由函数 $f_s(x)$ 的作法及 $F_s(t)$ 的几何意义, 从 (2) 得

$$f_s(t_s)=f_1(t_1), \quad s\geqslant 1. \tag{3}$$

将 (3) 代入 (1), 则得

$$\Phi_s'(u) = \Phi_1'(u). \tag{4}$$

b) $t_s = \Phi_s(u)$ 属于 P_ε. 这时, $F_s'(t_s) = f_s(t_s) = 0$. 由于 $\Phi_s(u)$ 是递增函数, 于是推出

$$\Phi_s'(u) = +\infty.$$

所以 (4) 仍成立.

(iii) $\Phi_s(u) - \Phi_{s'}(u)$ 不是常数 $(s \neq s')$.

事实上, $\Phi_s(0) = \Phi_{s'}(0) = 0$, 而 $\Phi_s(\frac{\pi}{56}) = s, \Phi_{s'}(\frac{\pi}{56}) = s'$, 得所欲证.

下面的例子是由 Rey Pastor [123] 给出的.

设 θ 为例 23 中的 Cantor 函数. 于单位区间 $[0,1]$ 上定义函数 $h(x)$, 使在 Cantor 集 C 上它的值等于零; 而在构造 C 时取走的各个开区间 (a,b) 上, $h(x)$ 的图形由两个直径都在 x 轴上的全等的半圆组成, 对应左半 (a,b) 的半圆位于 x 轴之上, 而对应右半 (a,b) 的半圆位于 x 轴之下:

$$h(x) = \begin{cases} \left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \dfrac{3a+b}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & a < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ -\left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \dfrac{3b+a}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & \dfrac{a+b}{2} \leqslant x < b. \end{cases}$$

于是 h 在区间 $[0,1]$ 上处处连续, 最后, 设 $f(x) = 2\theta(x) + h(x)$ 和 $g(x) = \theta(x) + h(x)$. 那么在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上 $f'(x) = g'(x)$: 对于 Cantor 集 C 的每个 x 来说, $f'(x) = g'(x) = +\infty$; 若 x 是构造 C 时所取走的一个区间的中点, 则有 $f'(x) = g'(x) = -\infty$; 在其他的 $x \in [0,1] \setminus C$, $f'(x) = g'(x) = h'(x)$. 另一方面, $f(x) - g(x) = \theta(x)$, 而 $\theta(x)$ 不是常值函数.

25. 导数几乎处处为零的严格单调的连续函数.

下面的例子是 Hellinger 作出的.

在 $[0,1]$ 上用归纳法作递增的连续函数序列 $\{H_n\}$: 设 $H_0(x) = x$. 假如 $H_n(x)$ 已经按如下方式定义, 它在区间

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{n-1})$$

上是线性的 (为方便起见, 称它为第 n 级区间), 那么定义

$$H_{n+1}(\alpha) = H_n(\alpha), \quad H_{n+1}(\beta) = H_n(\beta),$$

在 $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 上, 定义

$$H_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1-\lambda}{2} H_n(\alpha) + \frac{1+\lambda}{2} H_n(\beta), \tag{1}$$

其中 λ 是 $(0,1)$ 中取定的一个数, 而在第 $n+1$ 级区间 $(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}), (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ 上, $H_{n+1}(x)$ 分别为线性函数. 例如, 若取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则 $H_1(0) = 0$, $H_1(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}, H_1(1) = 1$

(参看图 7).

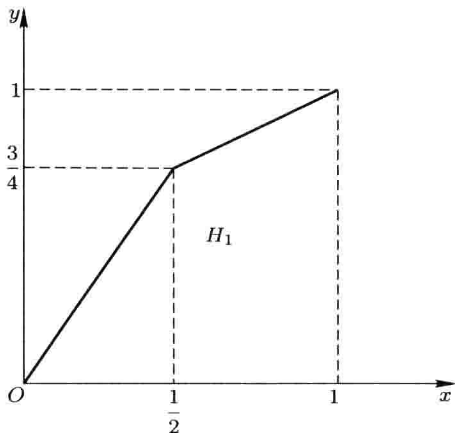


图 7

从上述定义方式易知, 当 $H_n(x)$ 是递增函数时, $H_{n+1}(x)$ 也是递增函数. 由于 $\lambda > 0$, 故从 (1) 得到

$$H_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > H_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

从而

$$H_{n+1}(x) > H_n(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

因此, 对任何 $x \in [0,1]$, 都有

$$H_0(x) \leqslant H_1(x) \leqslant H_2(x) \leqslant \cdots,$$

并且

$$0 \leqslant H_n(x) \leqslant 1.$$

由此可知, $\{H_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于一个递增函数 $H(x)$.

我们先证 $H(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数. 为此, 我们先来计算 $H(x)$ 在某个第 n 级区间 $(\alpha_n, \beta_n) = (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ 上的值 $H(\beta_n) - H(\alpha_n)$. 由函数 $H_n(x)$ 的定义可知

$$H_{n+1}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) - H_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1+\lambda}{2}\left[H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n)\right],$$

$$H_{n+1}(\beta_n) - H_{n+1}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right) = \frac{1-\lambda}{2}\left[H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n)\right]. \tag{2}$$

记 $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ 是第 $n+1$ 级区间

$$\left(\alpha_n, \frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n)\right), \quad \left(\frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n), \beta_n\right)$$

中的某一个, 由 (2) 得到

$$H_{n+1}(\beta_{n+1}) - H_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1\pm\lambda}{2}[H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n)], \tag{3}$$

从 $H_n(x)$ 的定义知道, 当 $k \geqslant n$ 时

$$H_k(\alpha_n) = H_n(\alpha_n), \quad H_k(\beta_n) = H_n(\beta_n).$$

所以令 $k \to \infty$, 便得到

$$H(\alpha_n) = H_n(\alpha_n), \quad H(\beta_n) = H_n(\beta_n).$$

再从 (3) 就得到

$$H(\beta_{n+1}) - H(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm \lambda}{2}[H(\beta_n) - H(\alpha_n)]. \tag{4}$$

重复应用 (4), 就得到

$$H(\beta_{n+1}) - H(\alpha_{n+1}) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1 + \lambda\varepsilon_\nu}{2}, \quad \varepsilon_\nu = \pm 1. \tag{5}$$

从 (5) 得到对任何 n 级区间 (α_n, β_n), 都有 $H(\beta_n) - H(\alpha_n) > 0$, 因而 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 又, 当 $n \to \infty$ 时, 由 (5) 得到

$$0 < H(\beta_n) - H(\alpha_n) < \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{6}$$

由于函数 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调的, 于是由 (6) 易知 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

我们再证 $H(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数几乎处处为零. 事实上, 因为 $H(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调函数, 所以由 Lebesgue 定理可知 (参看 [6], pp.120—124), 它在 $[0,1]$ 上几乎处处可微. 记 $H'(x)$ 存在且有限的点的全体为 E_0, 并令

$$E = E_0 \setminus \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \setminus \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty},$$

则因 $mE_0 = 1$, 所以 $mE = 1$. 任取 $x \in E$, 并且 $\alpha_n < x < \beta_n$, 那么从 (5) 得到

$$\frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + \varepsilon_\nu\lambda),$$

当 $n \to \infty$ 时, 由于无穷乘积 $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_\nu\lambda)$ 是发散的, 而上式左边有极限 $H'(x)$, 所以只有 $H'(x) = 0$. 得所欲证.

Gerald [77] 用简单的方法构造了一个导数几乎处处为零的严格单调的连续函数. 他的构造法如下: 设 g 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 即在开区间 $(1/3, 2/3)$ 上, $g(x) = 1/2$; 在 $(1/9, 2/9)$ 上, $g(x) = 1/4$; 而在 $(7/9, 8/9)$ 上, $g(x) = 3/4$; 如此继续下去. 然后, 把 g 连续地扩张到区间 $[0,1]$ 上. 此外, 令 $g(x) = 0$, 当 $x < 0$ 时; $g(x) = 1$, 当 $x > 1$ 时. 易见, g 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的非减的连续函数, 且 $g'(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上几乎处处成立. 令

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

是实数轴上的任一可数稠密子集, 并令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g[2^n(x - a_n)].$$

兹证, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续、严格递增且导数几乎处处为零.

事实上, 定义函数 f 的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致收敛的. 因此, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 若 $x_2 < x_1$, 取 a_n 使 $x_2 < a_n < x_1$, 则

$$g[2^n(x_1 - a_n)] > 0 = g[2^n(x_2 - a_n)],$$

且

$$g[2^m(x_1-a_m)] \geqslant g[2^m(x_2-a_m)] \quad (m \neq n).$$

因此, $f(x_1) > f(x_2)$, 即 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增的. 最后, 据 Fubini 定理 (参看 [39], p.155), 在 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g'[2^n(x-a_n)]=0.$$

注 刘文 [3],[4] 用比较一般的方法构造了一类导数几乎处处为零的严格单调的连续函数.

26. 闭区间上具有原函数的有界函数而不 (R) 可积.

我们从闭区间 $[0,1]$ 去掉中间的长 $1/4$ 的开区间. 然后从剩下来的两个闭区间各去掉中间的长 $1/4^2$ 的开区间. 在第 n 步, 从第 $n-1$ 步剩下来的 2^{n-1} 个闭区间各去掉中间的长 $1/4^n$ 的开区间. 无限地继续这个过程, 我们从区间 $[0,1]$ 内去掉了一列总长度为

$$\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{2}$$

的开区间, 剩下来的点形成完备疏集 E, 其测度是 $1/2$.

现在我们定义函数 f. 对 $x\in E$, 令 $f(x)=0$. 若 (α,β) 是去掉的开区间之一, 则紧接着 α 的右边定义

$$f(x)=(x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha},$$

紧接着 β 的左边定义

$$f(x)=(x-\beta)^2\sin\frac{1}{\beta-x},$$

直至达到最靠近 (α,β) 中间的极大值点 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$; 在区间 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ 内, 规定 $f(x)$ 等于这个极大值 (参看图 8).

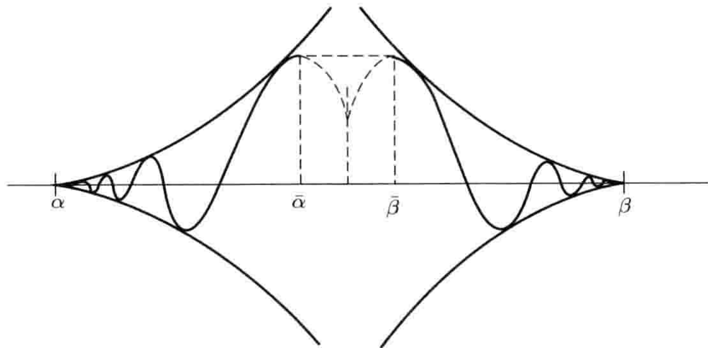


图 8

这样, 我们在整个区间 $[0,1]$ 上定义了函数 f, 它是连续函数.

显然, f 在去掉的各个区间 (α,β) 内可微, 即使在 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ 处也如此, 在这两个点的导数是 0. 对充分接近 α 的点 x $(x>\alpha)$, 我们有

$$f'(x)=2(x-\alpha)\sin\frac{1}{x-\alpha}-\cos\frac{1}{x-\alpha};$$

若 $x\to\alpha$, 右端的第一项趋于 0, 而第二项在 $+1$ 与 -1 之间振动. 在 β 的左邻域内情况类似.

在点 α,β 处, 甚至在每个点 $x_0\in E$ 处 $f'(x_0)$ 都存在, 并且

$$f'(x_0)=0. \tag{1}$$

为证明这一点, 先设 $x>x_0$. 若 $x\in E$, 则

$$f(x)-f(x_0)=0-0=0;$$

若 x 含于某个被去掉的区间 (α,β), 则

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\leqslant(x-\alpha)^2\leqslant(x-x_0)^2;$$

因此, 无论什么时候都有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant|x-x_0|.$$

$x<x_0$ 时仍然如此. 令 $x\to x_0$, 便得 (1).

这样, $f'(x)$ 处处存在, 但它在 E 上不连续. 事实上, 若 $x_0\in E$, 则在 x_0 的每个邻域内存在被去掉的区间的点, 因而也存在被去掉的区间之一的端点; 但我们知道: 在这样的端点, 函数 f' 的振幅等于 2. 由于 $mE>0$, 因此, f' 不可能 Riemann 可积.

上面的构造方法属于意大利数学家 Volterra (1860—1940).

注 Goffman [78] 只用了初等的术语, 构造了 $[a,b]$ 上的一个可微函数 f, 使 f' 有界而不 (R) 可积.

Marcus [111] 构造了 $[a,b]$ 上的一个具有有界导函数的函数 f, 使 f' 在 $[a,b]$ 的任何非空子区间上均不 (R) 可积. 他的作法如下:

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个无处单调函数, 使集

$$E=\{x:f'(x)>0\}\quad 和\quad H=\{x:f'(x)<0\}$$

在 $[a,b]$ 内皆稠密. 这种函数是存在的, 参看 [66]. 于是, 对 $[a,b]$ 的每一非空子区间 I, 有

$$m(E\cap I)>0,\quad m(H\cap I)>0.$$

令 D 代表 f' 在 $[a,b]$ 上的间断点所成之集, 则

$$D\cap I\supset(E\cap I)\cup(H\cap I),$$

从而 $m(D\cap I)>0$, 故 f' 在 I 上并不 (R) 可积.

27. (R) **可积函数** f **和连续函数** g**, 构成不** (R) **可积的复合函数** $f\circ g$**.**

设 A 为 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, (a_i,b_i) $(i=1,2,\cdots)$ 为 A 的邻接

区间. 在 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 1-\dfrac{1}{2}(b_i-a_i)+\left|x-\dfrac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i),\quad i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 而 g 在 $[0,1]$ 上连续, 这是因为对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$, 都有

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|.$$

然而, 由于

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus A,\end{cases}$$

在 A 上无处连续, 而 $mA>0$, 故复合函数 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积.

注 这个例子中函数复合的顺序不能倒置. 换句话说, 如果 f 在紧区间 I 上连续, g 在 I 上 (R) 可积, 那么复合函数 $f\circ g$ 在 I 上必定 (R) 可积 (参看 [118], p.153).

又, 我们还可以构造 $[0,1]$ 上的 (R) 可积函数 f 和无穷可微函数 g, 使复合函数 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积 (参看 [76], 中译本 pp.114—115).

28. 一个收敛的单调一致有界的连续函数序列, 其极限函数不 (R) 可积.

先对任何开区间 $I=(a,b)$, 其中 $0\leqslant a<b\leqslant 1$, 以及任何正整数 n, 定义函数 $g_{n,I}$:

$$g_{n,I}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 1, & b\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & a+\dfrac{b-a}{2^n}\leqslant x\leqslant b-\dfrac{b-a}{2^n},\\ \text{线性}, & a\leqslant x\leqslant a+\dfrac{b-a}{2^n},\\ \text{线性}, & b-\dfrac{b-a}{2^n}\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

设 A 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, f_A 是 A 的特征函数, 即

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus A,\end{cases}$$

$\{J_n\}$ 是 A 的邻接区间. 在 $[0,1]$ 上定义函数序列:

$$f_1(x) = g_{1,J_1}(x),$$

$$f_2(x) = g_{2,J_1}(x)g_{2,J_2}(x),$$

$$\cdots,$$

$$f_n(x) = g_{n,J_1}(x)g_{n,J_2}(x)\cdots g_{n,J_n}(x).$$

不难证明, f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 一致有界, $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$, 且对每一 $x \in [0,1]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_A(x).$$

另一方面, 由于 f_A 的间断点所成之集是 A, 而该集具有正测度, 因而 f_A 在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积.

注 我们还可进一步构造 $[0,1]$ 上的一个收敛的单调一致有界的无穷可微函数序列, 其极限函数在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积 (参看 [76], 中译本 pp.114—115).

29. $[0,1]$ 上的一个可微函数 g, 使 $g''(0)$ 存在, 而对任何 $b > 0$, g' 在 $[0,b]$ 上并不 (R) 可积.

设 f 是例 26 中的可微函数, 并设

$$g(x) = x^2 f(x).$$

则

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x).$$

因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 所以

$$\lim_{x\to 0} xf'(x) = 0.$$

从而得到

$$g''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}(2f(x) + xf'(x)) = 0.$$

兹证 g' 在 E 上无处连续, 这里 E 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集 (参看例 26). 事实上, 在例 26 中已经证明了 f' 在 E 上无处连续, 于是由 g' 的表达式可知, g' 在 E 上也是无处连续的.

任取 $b > 0$, 由 E 的构造法可知, $m([0,b] \cap E) > 0$, 从而得到 g' 在区间 $[0,b]$ 上不 (R) 可积的结论.

注 Ballard, Livingston 和 Myers [88] 采用与 Volterra 相仿的方法, 构造了 $[0,1]$ 上的一个可微函数 g, 使 $g''(0)$ 存在而 g' 在每个非空子区间 $[0,b]$ 上均不 (R) 可积.

30*. 一个同胚映射, 它把一个测度为零的集映成测度大于零的集.

设 $[a,b]$ 和 $[a_1,b_1]$ 分别是 x 轴上和 y 轴上的闭区间. 将 $[a,b]$ 等分成三部分, 并取走中间的开区间, 记作 I_1. 将余下的两个闭区间还是等分成三部分, 并各取走

中间的开区间, 记作 I_2 和 I_3. 无限地继续这个过程, 我们从区间 $[a,b]$ 内取走了一列总长度为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(b-a)+2\cdot\frac{1}{3^2}(b-a)+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}(b-a)+\cdots\\&=\frac{1}{3}(b-a)\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\right]\\&=b-a\end{aligned}$$

的开区间, 剩下来的点形成测度为零的完备疏集 C.

我们先着手构造 $[a,b]$ 上的严格递增的连续函数序列 $\{f_n\}$. 为此, 先作 $[a,b]$ 上的线性函数 f_0, 适合

$$f_0(a)=a_1,\quad f_0(b)=b_1,$$

且具有常数斜率

$$\frac{b_1-a_1}{b-a}=k.$$

其次, 作 $[a,b]$ 上的连续函数 f_1, 使在 a,b 两点及在 I_1 的中点处, $f_1(x)=f_0(x)$; 在 I_1 上, $f_1(x)$ 的图像是斜率为 θk $(0<\theta<1)$ 的直线段; 在 I_1 的左侧闭区间上, $f_1(x)$ 的图像为连接点 (a,a_1) 和 $f_1(x)$ 在 I_1 上的线段的左端点的直线段; 在 I_1 的右侧闭区间上, $f_1(x)$ 的图像为连接 $f_1(x)$ 在 I_1 上的线段的右端点和点 (b,b_1) 的直线段.

依次作下去. 一般地, 设 f_n 已经作出, 则 f_{n+1} 的作法如下: 它在 a,b 及 $I_1,I_2,\cdots$ 中的前面 2^n-1 个区间上 (包括区间的端点) 和后面 2^n 个区间的中点处, $f_{n+1}(x)=f_n(x)$; 在这 $2^n-1+2^n=2^{n+1}-1$ 个区间上, $f_{n+1}(x)$ 的图像都是斜率为 θk 的直线段; 在与 $\cup_{i=1}^{2^{n+1}-1}I_i$ 相邻的其他区间上, $f_{n+1}(x)$ 的图像都是直线段 (并使 f_{n+1} 在 $[a,b]$ 上连续). 图 9 所示的是函数 f_0 和 f_1 的图像, 这里取 $a=a_1=0,b=b_1=1,k=1,\theta=1/2$.

这样一来, 每个 f_n 都是 $[a,b]$ 上的严格递增的连续函数, 其值域都是 $[a_1,b_1]$, 而且对于 $n=0,1,2,\cdots$, 有不等式

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\frac{b_1-a_1}{2^{n+1}},\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

因此, 函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续函数 f, 或详细写为

$$f(x;\theta,a,b,a_1,b_1).$$

显然, f 亦为 $[a,b]$ 上的严格递增函数, 其值域也是 $[a_1,b_1]$, 从而它是由 $[a,b]$ 到 $[a_1,b_1]$ 上的一个同胚映射 (参看 [7], pp.100—101), 而且在 $I_1,I_2,\cdots$ 上, $f(x)$ 的图像都是斜率为 $k\theta$ 的直线段.

设 I_i 在映射 f 之下的像为 I_i^*, 则 (参看 [82], 中译本 pp.67—69)

$$mI_i^*=\theta kmI_i.$$

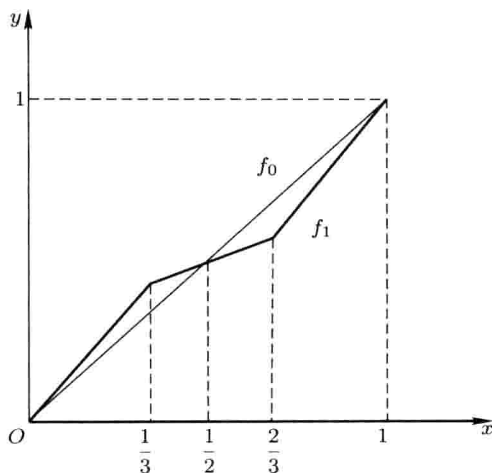


图 9

令

$$B=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

并设 B 在映射 f 之下的像为 B^*, 由 f 的严格递增性可得

$$mB^*=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^*\right)=\sum_{i=1}^{\infty} mI_i^*=\sum_{i=1}^{\infty} \theta k mI_i=\theta k mB.$$

而 $mB=b-a$, 所以

$$mB^*=\theta(b_1-a_1),$$

因而若设 C^* 为 C 在 f 之下的像, 则

$$mC^*=(1-\theta)(b_1-a_1).$$

也就是说, 同胚映射 f 把测度为零的集 C 映成测度大于零的集 C^*.

31*. $[0,1]$ 上的一个严格递增的连续函数 φ 和集 $A\subset[0,1]$, 使 $mA=0$ 而 $m\varphi(A)=1$.

先作出函数 $y=f(x;\theta,0,1,0,1)$ (参看例 30), 并简称此函数为 φ_1. φ_1 的图像含有可数多个线段, 它们在 x 轴上的射影成一开集 B_1, 其测度为 1. 今将这可数多个线段中的每一线段, 代以函数

$$f(x,\theta,a,b,a_1,b_1)$$

的图像, 其中 a,a_1 及 b,b_1 为此线段端点的坐标.

经过如此的运算, 我们得到一个函数 φ_2. 易见, 它也是 $[0,1]$ 上严格递增的连续函数.

函数 φ_2 的图像亦含有无穷多个线段, 它们在 x 轴上的射影成一开集 B_2. 易见, B_2 为 B_1 的子集, 且亦有 $mB_2 = 1$.

今将由 φ_1 得 φ_2 的方式逐次施行, 就得到区间 $[0,1]$ 上的一个严格递增的连续函数序列 $\{\varphi_n\}$. 由 φ_n 的作法可知, 对每一 $x \in [0,1]$, 都有

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| < \frac{1}{3}, \quad |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| < \frac{1}{3^2}, \quad \cdots,$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{3^n}, \quad \cdots,$$

因而函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个连续函数 φ. 不难验证, φ 在 $[0,1]$ 上是严格递增的. 事实上, 任取 $\xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ 且 $\xi_1 < \xi_2$, 则可选取 n 充分大, 使得 φ_n 为线性的某个线段其在 x 轴上的射影含于 $[\xi_1, \xi_2]$ 内. 设 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ 为此射影的两个端点, 则

$$\varphi(\xi_1) \leqslant \varphi(x_1), \quad \varphi(x_1) = \varphi_n(x_1), \quad \varphi_n(x_1) < \varphi_n(x_2),$$

$$\varphi_n(x_2) = \varphi(x_2), \quad \varphi(x_2) \leqslant \varphi(\xi_2).$$

由是推得 φ 是 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数, 其值域也是 $[0,1]$. 因此, φ 是由 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一个同胚映射.

以 B_n 表 φ_n 的图像内诸线段在 x 轴上的射影, 以 B_n^* 表此等线段在 y 轴上的射影, 则对每一 n, 有

$$B_{n+1} \subset B_n, \quad B_{n+1}^* \subset B_n^*.$$

其次, 由以上的构造可知,

$$mB_{n+1} = mB_n, \quad mB_{n+1}^* = \theta mB_n^*,$$

或因 $mB_1 = 1$, $mB_1^* = \theta$, 可见对每一 n, 有

$$mB_n = 1, \quad mB_n^* = \theta^n.$$

今以 B 表所有 B_n 之交, 且以 B^* 表 B 在映射 φ 之下的像, 则

$$mB = \lim_{n\to\infty} mB_n = 1.$$

设 p 为 B 的某一点, p^* 为 B^* 的对应点, 并设 p_m^* 为 p 在映射 φ_m 之下的像, 则

$$p^* = \lim_{m\to\infty} p_m^*.$$

因此, 若取定正整数 n, 则对所有 $m > n$, 点 p_m^* 全部位于 B_n^* 的某个区间内. 由此可知, 点 p^* 或为此区间的一个内点, 或为它的一个端点. 换句话说, B^* 的每一点 p^* 都是每个 B_n^* 的某个区间的内点或端点. 于是, 若令 A_n^* 为 B_n^* 中诸区间的端点所成之集, 则有

$$B^* \subset B_n^* \cup A_n^*.$$

由于 A_n^* 是可数集, 所以 $mA_n^* = 0$, 从而

$$mB^* \leqslant mB_n^* = \theta^n.$$

因为上式对一切 n 为真, 所以 $mB^* = 0$.

把区间 $[0,1]$ 中不含于 B 中的点的全体记作 A, 则 $mA=0$, 而 A 在映射 φ 之下的像记为 A^*, 则

$$mA^*=1-mB^*=1.$$

即 φ 把测度为零的集 A 映成测度为 1 的集 A^*.

32. 对任一完备疏集 $E\subset[0,1]$, 一个从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的同胚映射 f, 使 $mf(E)=0$.

任取完备疏集 $E\subset[0,1]$, 则 $0\leqslant mE<1$. 令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]\setminus E))}{m([0,1]\setminus E)},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

易见, $f(0)=0, f(1)=1$, 且 f 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的严格递增的连续函数, 因而它是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一个同胚映射.

设 (α_k,β_k) $(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的邻接区间, 则

$$[0,1]\setminus E=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k),$$

从而

$$m([0,1]\setminus E)=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k).$$

又因为

$$\begin{aligned}f(\beta_k)-f(\alpha_k)&=\frac{m([0,\beta_k]\cap([0,1]\setminus E))-m([0,\alpha_k]\cap([0,1]\setminus E))}{m([0,1]\setminus E)}\\&=\frac{\beta_k-\alpha_k}{m([0,1]\setminus E)},\end{aligned}$$

所以

$$mf([0,1]\setminus E)=\sum_{k=1}^{\infty}(f(\beta_k)-f(\alpha_k))=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)}{m([0,1]\setminus E)}=1.$$

注意到

$$f(E)\cup f([0,1]\setminus E)=[0,1]$$

且

$$f(E)\cap f([0,1]\setminus E)=\varnothing,$$

就得到

$$mf(E)=1-mf([0,1]\setminus E)=0.$$

注 容易看出, $f(E)$ 也是完备疏集. 因而上述反例表明两个同胚的完备疏集, 其中一个测度为零而另一个的测度可以大于零 (参看例 30).

33. 可测的非 Borel 集.

设 E 为 $[0,1]$ 中的完备疏集, 且 $mE>0$, A 为 E 的不可测子集. 令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]\setminus E))}{m([0,1]\setminus E)},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 f 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一个同胚映射, 且

$$mf(E)=0$$

(参看例 32). 由于 $f(A)$ 是 $f(E)$ 的子集, 故它也是一个测度为零的集. 然而 $f(A)$ 决非 Borel 集. 事实上, 假如 $f(A)$ 是一个 Borel 集, 那么, 由于同胚映射把 Borel 集映成 Borel 集 (参看 [39], p.69), 就将导致 A 也是 Borel 集, 从而是可测集的谬误.

注 用势的知识可以证明直线上 Borel 集全体的势是 $\aleph$, 而 Lebesgue 可测集的势为 $2^{\aleph}$. 但 $2^{\aleph}>\aleph$, 所以 Lebesgue 可测集比 Borel 可测集要多得多!

34. 一个同胚映射, 它把一个可测集映成不可测集.

例 33 中的集 $f(A)$ 为一可测集, f 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的同胚映射, 从而 f^{-1} 也是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的同胚映射, 它把可测集 $f(A)$ 映成不可测集 $f^{-1}[f(A)]=A$.

注 可测集经过绝对连续函数 (关于绝对连续函数的定义, 可参看第十一章的引言) 的变换, 其所得之像仍为可测集 (参看 [27], 中译本 p.307). 上述反例表明了在这个命题中, 不能把绝对连续函数代以同胚映射.

35. 一个 Borel 测度为零的集, 其中含有非 Borel 可测集.

设 E 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, 令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]\setminus E))}{m([0,1]\setminus E)},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 f 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一个同胚映射, 且 $mf(E)=0$ (参看例 32). 因为 f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的连续函数, 所以 f 映 $[0,1]$ 中的开区间 (α,β) 为开区间 $(f(\alpha),f(\beta))$. 由此可知, $f(E)$ 也是一个完备疏集, 从而它是 Borel 可测的, 且 $f(E)$ 的 Borel 测度为零.

设 N 是 E 的依 Lebesgue 意义下的不可测子集, 令 $L=f(N)$, 则 $L\subset f(E)$. 可以证明, L 不是 Borel 可测集. 事实上, 假若 L 是 Borel 可测集, 则由于 f^{-1} 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的连续函数, 因而它把 $[0,1]$ 中的 Borel 可测集 L 映成 Borel 可测集 $N=f^{-1}(L)$ (参看 [39], p.57), 从而 N 也是 Lebesgue 可测集, 这是矛盾的. 因此, L 不是 Borel 可测集.

注 Lebesgue 测度是一种完备的测度, 即, 如果 A 是 Lebesgue 可测集且 $mA=0$, 而 $B\subset A$, 那么 B 也是 Lebesgue 可测集且 $mB=0$. 上述反例说明了 Borel 测度是一种不完备的测度.

36. 两个 Borel 可测集 B_1, B_2, 使得 $B_1 - B_2 = \{x - y : x \in B_1, y \in B_2\}$ 不是 Borel 可测的.

这个例子是由 Rogers 作出的, 细节说明已在 [138] 中.

Darst [61] 进一步指出, 存在实直线上的 Borel 集 B 及实直线的同胚映射 φ, 使

$$\{x - \varphi(x) : x \in B\}$$

不是 Borel 集.

37*. 两个同胚的实数集, 其中一个是第一纲集而另一个是第二纲集.

设 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, $\{J_n\}$ 是 C 的邻接区间序列, 其中 J_1 是构造 C 时第一次删去的开区间; J_2 和 J_3 分别是第二次删去的位于 J_1 左边和右边的开区间, 等等.

设 $\{s_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的全体有理数. 我们先定义序列 $\{r_n\}$ 如下: 设 $r_1 = s_1$; 设 $r_2 = s_n$, 此处的 n 是使 $s_n < r_1$ 的最小正整数; 设 $r_3 = s_n$, 此处的 n 是使 $s_n > r_1$ 的最小正整数; 然后设 $r_4 = s_n$, 此处的 n 是使 $s_n < r_2$ 的最小正整数; 设 $r_5 = s_n$, 此处的 n 是使 $r_2 < s_n < r_1$ 的最小正整数; 设 $r_0 = s_n$, 此处的 n 是使 $r_1 < s_n < r_3$ 的最小正整数; 设 $r_7 = s_n$, 此处的 n 是使 $s_n > r_3$ 的最小正整数. 如果这个程序继续下去, 在 0 和 1 之间的有理数将排成一个序列 $\{r_n\}$, 它们的次序关系对应于开区间序列 $\{I_n\}$ 的次序关系, 如图 10 所示. 换句话说, $r_m < r_n$ 当且仅当 J_m 位于 J_n 的左侧.

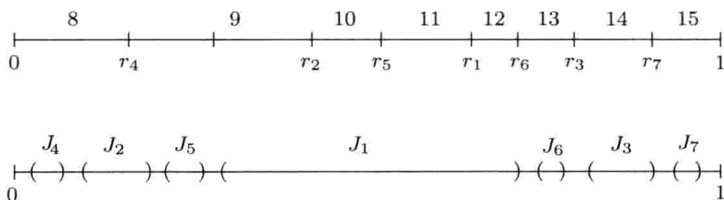


图 10

我们再着手构造 $[0,1]$ 上的一个递增的连续函数. 为此, 对每一 $x \in J_n$, 令 $f(x) = r_n$, 则 f 在 $G = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ 上有定义, 它在每个 J_n 上为常值函数, 且限制在 G 上为一递增函数 (参看图 6). 将 f 扩充定义到整个区间 $[0,1]$ 上:

$$f(x) = \sup_{\substack{t \in G \\ t < x}} f(t), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

这样, f 是整个区间 $[0,1]$ 上的一个递增函数. 由于 $f(G) = \{r_n\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 所以 f 在 $[0,1]$ 上连续 (参看例 30).

设 B 是 Cantor 集 C 的邻接区间的各个端点组成, 再设 $E = C \setminus B$, 则 f 将 B 映射到 $(0,1)$ 中的全体有理数集 $\{r_n\}$ 上, 将 E 映射到 $(0,1)$ 中的全体无理数集 $(0,1) \setminus \{r_n\}$ 上. 后一种情况, 在 E 与 $(0,1) \setminus \{r_n\}$ 之间的映射是严格递增的和双

方连续的 (从 E 中诸点的次序关系以及与 $(0,1)\setminus\{r_n\}$ 中诸点的次序关系的对应得出逆映射的连续性). 因此, E 与 $(0,1)\setminus\{r_n\}$ 是同胚的. 也就是说, 删去各个"端点"后的 Cantor 集同胚于 0 到 1 之间的无理数集. 但是, E 是疏集因而是第一纲集, $(0,1)\setminus\{r_n\}$ 却是第二纲集.

38*. 两个同胚的实数集, 其中一个是稠密集而另一个是疏集.

在例 37 中, 把 $(0,1)$ 中的有理数的全体 $\{r_n\}$ 换成 $(-\infty,+\infty)$ 中的有理数的全体, 这时就得到 E 与 $(-\infty,+\infty)$ 内的全体无理数所成之集的同胚. E 是疏集而后者是稠密集.

39*. 定义于 R^1 上的一个几乎处处为零的函数, 它在每个非空开区间上的值域都是 R^1.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, θ 是 Cantor 函数 (参看例 23), 令

$$g(x)=\tan\left[\pi\left(\theta(x)-\frac{1}{2}\right)\right],\quad 0<x<1.$$

由 $\theta(x)$ 的定义可知, 当 x 遍历 $C\cap(0,1)$ 时, $\theta(x)$ 的值域是开区间 $(0,1)$, 从而 $g(x)$ 的值域是 R^1. 也就是说, g 是将 $C\cap(0,1)$ 映到 R^1 上的一个满映射. 现对任意非空开区间 $I=(a,b)$, 我们借助于函数 g 而相应地构造函数 g_I. 为此, 令

$$Z_I=\{a+(b-a)x:x\in C\cap(0,1)\},\quad g_I(x)=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right),\quad x\in Z_I,$$

则 $mZ_I=(b-a)mC=0$ (参看 [82], 中译本 pp.67—69), 且 g_I 是将集 Z_I 映到 R^1 上的一个满映射.

我们着手定义所要求的函数 f, 先让它在整数集 $\{n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上等于零. 然后定义开集序列 $\{U_n\}$ 如下: 设 $U_1=R^1\setminus\{n\}$, 它是一切形如 $(n,n+1)$ 的开区间的并集, 此处 n 为整数. 在每一个这种区间 I 上, 设 Z_I 为以上定义的测度为零的集, 并且在 Z_I 上定义 f 等于 g_I. U_I 内 f 尚未定义的点组成子集 U_2, 它是开集, 因而是不相交的开区间的并集. 在每一个这种开区间 I 上, 设 Z_I 为以上定义的测度为零的集, 并且在 Z_I 上定义 f 等于 g_I. U_2 内 f 尚未定义的子集 U_3 仍是开集, 所以还是不相交的开区间的并集. 如果照着上面的定义再取集 Z_I, 那么函数 f 的定义域就能够又一次地扩大, 以包括这些测度为零的集. 利用开集序列 $\{U_n\}$ 中每一个都有测度为零的余集, 让这个程序继续下去. 从而函数 f 转化为定义在一个测度为零的集 —— $U_1,U_2,\cdots$ 的交的余集, 或等价地, 它们的余集 $U_1^c,U_2^c,\cdots$ 的并集 —— 上, 用这样一种方法使每个非空开区间必然包含开集 U_n 之一的一个开区间 I, 因而也就包含一个集 Z_I, 在它上面, f 的值域是 R^1. 最后, 在 f 一直没有定义的各点, 让 f 恒等于零.

40*. R^1 上的一个函数, 它的图形在平面内稠密.

例 39 的函数就有这个性质.

第八章

可测函数

---

0. 引言.

这一章主要讨论定义在可测集上的可测函数方面的例子, 也涉及不可测函数以及函数的 Baire 分类法, 现在将基本定义和性质给出如下:

设 f 是定义在可测集 E 上的函数, 若对任意实数 a, $E[x:f(x)>a]$ 恒为可测集, 则称 f 是 E 上的 Lebesgue 可测函数, 简称 (L) 可测函数或可测函数.

给定在可测集 E 上的函数 f 为可测的必要充分条件为: $E[x:f(x)\geqslant a]$ 恒为可测集, 或 $E[x:f(x)<a]$ 恒为可测集, 或 $E[x:f(x)\leqslant a]$ 恒为可测集.

可测函数的性质:

1° 若定义在可测集上的两个函数皆可测, 则它们的和、差、积、商 (假定运算几乎处处有意义) 也皆可测.

2° 若 $\{f_n\}$ 是定义在可测集 E 上的可数个 (或有限个) 可测函数, 则 $\sup_n f_n(x)$ 与 $\inf_n f_n(x)$ 也是 E 上的可测函数.

推论 1 设 f 是可测集 E 上的可测函数, 则 $|f|$ 也是 E 上的可测函数.

推论 2 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数序列, 则 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ 与 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ 也是 E 上的可测函数.

3° 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数序列, 则当 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 几乎处处存在时, 它也是 E 上的可测函数.

4° 若定义在可测集 E 上的两个函数仅在测度为零的集上彼此相异 (此时称这两个函数为对等的), 则它们或者都可测, 或者都不可测.

5° 若 f 在 E 上可测, A 为 E 的可测子集, 则 f 在 A 上也可测.

可测函数的例子:

1° 可测集上的连续函数是可测的.

若 E 可分成有限个可测集的并: $E=\cup_{k=1}^{n}E_k, f$ 在每个 E_k 上都是常值函数, 则称 f 是 E 上的简单函数.

2° 可测集上的简单函数是可测的.

3° 设 A 为可测集 E 的子集, 则 A 的特征函数

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in E\setminus A.\end{cases}$$

可测的充要条件是 A 为 E 的可测子集.

现在叙述重要的 Егоров 定理和 Лузин 定理如下:

Егоров 定理 设 $mE<+\infty, f_n(x)\ (x=1,2,\cdots)$ 与 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 则对任意正数 δ, 恒有 E 的可测子集 e, 使 $me<\delta$, 而在 $E_\delta=E\setminus e$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

Лузин 定理 设 $f(x)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数, 则对任意 $\varepsilon>0$, 恒有闭集 $F\subset E$, 使

(i) $m(E\setminus F)<\varepsilon$,

(ii) f 是 F 上的连续函数.

为了本章某些例子的需要, 我们还要介绍关于 Borel 可测函数和 Baire 函数分类法的概念如下:

设 f 是定义在 (B) 可测集 E 上的实值函数, 如果对任一实数 a, $E[x:f(x)>a]$ 恒为 (B) 可测集, 则称 f 是 E 上的 Borel 可测函数, 简称 (B) 可测函数, 也称为 Baire 函数[①].

记 E 上所有 Borel 可测函数全体为 $B(E)$, 称 $B(E)$ 为 Borel 可测函数类或 Baire 函数类. $B(E)$ 是关于代数运算及极限运算封闭的函数类. 换句话说, 当 $f,g\in B(E)$ 时, 那么它们的线性组合 $\alpha f+\beta g$, 最大值函数 $\max(f,g)$, 绝对值函数 $|f|$ 等等都是 $B(E)$ 中的函数. 当 $\{f_n\}$ 是 $B(E)$ 中的一列函数, 那么 $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$, $\lim f_n$ (如果存在且是有限函数) 都是 $B(E)$ 中的函数.

Borel 可测函数类 $B(E)$ 还可以用另一种方式引入. 例如当 $E=[a,b]$ (E 为一般 Borel 可测集的情况也一样讨论), E 上所有连续函数全体记为 $B_0(E)$, 称为第零类. 任取 $B_0(E)$ 中一列函数 $\{f_n\}$, 如果 $\lim_{n\to\infty}f_n$ 存在, 而且是有限函数, 当 $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ 不属于 $B_0(E)$ 时, 这种 f 的全体记为 $B_1(E)$, 称为第一类. 然后再从 $B_0(E)\cup B_1(E)$ 中任取一列函数 $\{f_n\}$, 如果 $\lim_{n\to\infty}f_n$ 存在且是有限函数, $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ 不属于 $B_0(E)\cup B_1(E)$ 时, 这种 f 的全体记为 $B_2(E)$, 如此一直

① 在一般拓扑空间情况下, Borel 函数类与 Baire 函数类是有区别的, 在 n 维欧几里得空间中是没有区别的.

进行下去所得到的函数全体记为 $B(E)$. Baire 就曾经是用这种方式引入的, 所以 $B(E)$ 又称为 Baire 函数类.

1. 一个收敛的递增的简单函数序列, 其极限函数不是简单函数.

设

$$I=(0,1),\quad I_1=\left(0,\frac{1}{2}\right],\quad I_2=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\quad \cdots,\quad I_n=\left(\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}\right],\quad \cdots,$$

则 $I=\cup_{k=1}^{\infty}I_k$. 在 $(0,1)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in I_1,\\ 0, & x\in I\setminus I_1,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}1, & x\in I_1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\in I_2,\\ 0, & x\in I\setminus(I_1\cup I_2),\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in I_1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\in I_2,\\ \cdots, & \\ \dfrac{1}{n}, & x\in I_n,\\ 0, & x\in I\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_k,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

易见, 对每一 n, f_n 都是 $(0,1)$ 上的简单函数, 且

$$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

但 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $(0,1)=\cup_{k=1}^{\infty}I_k$ 上有可数多个不同的值, 所以它不是 $(0,1)$ 上的简单函数.

注 容易证明, 两个简单函数的和、差、积、商 (假定运算有意义) 仍是简单函数. 也就是说, 对于简单函数而言, 加、减、乘、除运算是封闭的. 上述反倒说明简单函数的极限运算并不封闭.

2. 一个非零函数, 它与任何函数之积恒为可测函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数},\\ 0, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

则对任意函数 g, 函数 fg 几乎处处等于零, 因此, fg 与恒等于零的函数对等, 这意味着 fg 是可测函数.

3. 一个不可测函数, 其绝对值是可测函数.

设 $mE>0, A$ 为 E 的不可测子集, 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ -1, & x\in E\setminus A.\end{cases}$$

因为 $E[x:f(x)>0]=A$ 是不可测集, 所以 f 是 E 上的不可测函数. 然而, $|f(x)|\equiv 1$ 是 E 上的可测函数.

又, f^2 也是 E 上的可测函数.

注 容易证明, 若 f 是 E 上的可测函数, 则 $|f|$ 和 f^2 也是 E 上的可测函数. 上述反例说明了它们的逆命题并不成立.

4. 一族可测函数, 其上确界函数并不可测.

设 A 为 R^1 的不可测子集, 在 R^1 上定义函数

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=x_\alpha\in A,\\ 0, & x\neq x_\alpha.\end{cases}$$

于是, 对每一 α, f_α 都是 R^1 上的可测函数. 然而, 上确界函数

$$\sup_\alpha f_\alpha(x)=\varphi_A(x)$$

是 A 的特征函数, 这是一个不可测函数.

注 可测函数序列的上确界 (或下确界) 函数仍是可测函数. 上述反例说明了函数的可测性对一般的 $\sup_\alpha$ 及 $\inf_\alpha$ 不能保持.

5. R^1 上的一个可测函数 f, 使 $\sup_{t\in R^1}|f(x+t)-f(x-t)|$ 不可测.

设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值函数, 如果 f 可测, 则 $\varphi(x)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(x+t)-f(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也可测. 事实上, 令

$$M=\sup_{-\infty<y<+\infty}f(y),\quad m=\inf_{-\infty<y<+\infty}f(y),$$

$$\varphi_1(x)=M-f(x),\quad \varphi_2(x)=f(x)-m,$$

则

$$\varphi(x)=\max\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\},$$

故 $\varphi(x)$ 是两个可测函数的最大值函数, 从而是一个可测函数.

我们自然会提出下述问题: 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可测, 则

$$\varphi^*(x)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(x+t)-f(x-t)|$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否必定可测? Rubel [139] 指出, φ^* 未必可测. 他的例子如下: 设 E 为一有界的零测度集, 使 $E+E=\{x+y:x\in E,y\in E\}$ 为一不可测集 (参看

第七章例 19). 取实数 τ 充分大, 使

$$E \cap E^* = \varnothing,$$

这里 $E^* = E + \tau = \{x + \tau : x \in E\}$. 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ -1, & x \in E^*, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可测函数. 注意, 当 $t \in R^1$ 使 $x + t \in E$ 及 $x - t \in E^*$ 时, $\varphi^*(x) = 2$, 可见

$$\{x : \varphi^*(x) = 2\} = \frac{1}{2}\{(E + E) + \tau\},$$

这是一个不可测集, 从而 φ^* 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并不可测.

6^*. 一个在任何 (L) 正测度集上均非 (L) 可测的函数, 它在任何非空区间上取每个实数作为函数值可达 $\aleph$ 次.

下面的例子是 Halperin [83] 作出的. 构造这个例子, 需要涉及超限数的知识, 读者可参看 [27], 第十四章.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_\alpha, \cdots$ $(\alpha < \Omega)$ 是 R^1 中的一个 Hamel 基, 即对任一 $x \in R^1$, 存在有理数集 $\{r_\alpha\}$ 及 $\{a_\alpha\}$, 使

$$x = \sum_\alpha r_\alpha a_\alpha,$$

其中和式是有限项且表示法是唯一的, 而 Ω 是第一不可数序数.

我们把这个 Hamel 基排成两个超限序列:

$$b_1, b_2, \cdots, b_\alpha, \cdots \ (\alpha < \Omega), \quad c_1, c_2, \cdots, c_\beta, \cdots \ (\beta < \Omega).$$

对于 $x = \sum_\alpha r_\alpha b_\alpha + \sum_\beta s_\beta c_\beta$ (s_β 是有理数), 令

$$f(x) = \sum_\alpha r_\alpha a_\alpha.$$

于是, 对任意的非空区间 (a, b) 及任意的实数 $u = \sum_\alpha r_\alpha a_\alpha$, 若

$$x = \sum_\alpha r_\alpha b_\alpha + \sum_\beta s_\beta c_\beta,$$

这里 s_β 是任意的有理数, 则据函数 f 的定义, 有

$$f(x) = u.$$

特别, 如果仅有一个 $s_\beta \neq 0$, 例如 $s_{\beta_0} \neq 0$, 那么, s_{β_0} 可如此选取, 使得

$$a - \sum_\alpha r_\alpha b_\alpha < s_{\beta_0} c_{\beta_0} < b - \sum_\alpha r_\alpha b_\alpha.$$

由于这种选法有 $\aleph$ 次, 其中 $\aleph$ 为连续统的势, 因而 $f(x) = u$ 对 (a, b) 中 $\aleph$ 个 x 处成立.

最后, 因为 $f(x)$ 是函数方程 $g(x + y) = g(x) + g(y)$ 的不连续解, 所以它在任何一个 (L) 正测度集上均非 (L) 可测.

注 如所周知, 具有介值性质的函数不必连续 (参看第二章例 57). Lebesgue 进而构造了一个无处连续而具有介值性质的函数 (参看第二章例 59). Halperin 的例子是上述例子的进一步的发展.

7. 函数 f, 使对任意实数 $a, E[x : f(x) = a]$ 恒为可测集, 而 f 在 E 上并不可测.

设 $E = (0,1), e$ 为 E 的一个不可测子集. 令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in e, \\ -x, & x \in E \setminus e, \end{cases}$$

则对任意实数 $a, E[x : f(x) = a]$ 或为空集, 或为单元素集, 因而它恒为可测集. 然而, $E[x : f(x) > 0] = e$ 为一不可测集, 所以 f 是 E 上的不可测函数.

注 容易证明, 若 f 是 E 上的可测函数, 则对任意实数 $a, E[x : f(x) = a]$ 恒为可测集. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

8. 可测函数 f 和连续函数 g, 构成不可测的复合函数 $f \circ g$.

设 E 是 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, 令

$$\varphi(x) = \frac{m([0,x] \cap ([0,1] \setminus E))}{m([0,1] \setminus E)},$$

则 φ 是由 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一个同胚映射, 且 $m\varphi(E) = 0$ (参看第七章例 32). 设 A 是 E 的一个不可测的子集, 由于 $\varphi(A) \subset \varphi(E)$, 所以 $\varphi(A)$ 是可测集, 且 $m\varphi(A) = 0$, 而逆映射 φ^{-1} 把可测集 $\varphi(A)$ 映成不可测集 $\varphi^{-1}[\varphi(A)] = A$.

现令 $B = \varphi(A)$, 并在 $[0,1]$ 上如下定义函数 f:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus B, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的可测函数, 又 $g = \varphi$ 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的连续函数, 然而复合函数

$$f[g(x)] = f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

是不可测集 A 的特征函数, 所以它是一个不可测的函数.

应当注意, 这个例子的复合顺序不能倒置. 换句话说, 任何连续函数 f 与可测函数 g 的复合函数 $f \circ g$ 全都可测.

9*. 可测函数 f 和递增函数 g, 构成不可测的复合函数 $f \circ g$.

设 φ 为第七章例 31 中的函数, 令 $g = \varphi$, 则 $u = g(x)$ 是两个区间

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad 及 \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

之间相互一一对应的递增的连续映射. 由第七章例 31 的构造过程中可知, 我们可将区间 $[0,1]$ 分解为两个互不相交的点集 A 与 B, 使

$$mA = 0, \quad mB = 1,$$

而记其像集为 $A^* = g(A)$ 与 $B^* = g(B)$, 则有

$$mA^* = 1, \quad mB^* = 0.$$

今设 C_1 为闭区间 $[0,1]$ 中的任一不可测子集, 则由等式

$$C_1 = (C_1 \cap A) \cup (C_1 \cap B)$$

及

$$m(C_1 \cap A) \leqslant mA = 0$$

得知集 $C = C_1 \cap B$ 亦为 $[0,1]$ 的不可测子集. 因为假若它是可测集, 那么它与零测度集 $C_1 \cap A$ 之并 C_1 亦将反于假设而为可测集了. 命 $C^* = g(C)$, 因 C 是 B 的子集, 故 C^* 为 B^* 的子集. 于是由 $mB^* = 0$ 得到 $mC^* = 0$. 兹在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \in C^*, \\ 0, & u \in [0,1] \setminus C^*, \end{cases}$$

则 f 为 $[0,1]$ 上的一个可测函数. 因为 $C^* = g(C)$, 所以

$$\{x : f[g(x)] \geqslant 1\} = C.$$

而 C 为 $[0,1]$ 的不可测子集, 因此, $f \circ g$ 是 $[0,1]$ 上的不可测函数.

应当注意, 这个例子的复合顺序不能倒置. 事实上, 任何单调函数 f 与可测函数 g 的复合函数 $f \circ g$ 全都可测 (参看 [53], 中译本 p.309).

10. $[a,b]$ **上的一个一致有界的不可测函数序列** $\{f_n\}$**, 使对任一不可数集** $A \subset [a,b]$, $\{f_n\}$ **中不存在在** A **上收敛的子列.**

这个例子是由 Sierpiński 作出的. 构造这个例子, 要用到连续统的假设, 细节说明参看 [153].

注 Mazurkiewicz [113] 曾证明, 若 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一致有界的连续函数序列, 则存在不可数闭集 $F \subset [a,b]$ 及正整数 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使 $\{f_{n_k}\}$ 在 F 上一致收敛.

11. 任给趋于零的数列 $\{\alpha_n\}$**, 可构造一个有界可测函数** f**, 使** $\{f(x-\alpha_n)\}$ **并不几乎处处收敛于** $f(x)$**.**

设 E 为 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus E, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的有界可测函数. 对任一 $x_0 \in E$, 据 f 的定义, 有 $f(x_0) = 1$. 因为 E 是疏集, 所以对任何自然数 N, 总有 $n > N$ 使 $x_0 - \alpha_n \overline{\in} E$, 从而 $f(x_0 - \alpha_n) = 0$. 换言之, 当我们沿数列

$$f(x_0 - \alpha_1), f(x_0 - \alpha_2), \cdots, f(x_0 - \alpha_n), \cdots$$

看下去, 不论怎么样的远, 总有等于 0 的数出现, 所以当 $n \to \infty$ 时, 数列 $\{f(x_0 - \alpha_n)\}$ 并不趋于 1. 即, $\{f(x-\alpha_n)\}$ 在 E 上处处不收敛于 $f(x)$. 由于 $mE > 0$, 故 $\{f(x-\alpha_n)\}$ 在 $[0,1]$ 上并不几乎处处收敛于 $f(x)$.

12. Егоров 定理的结论不能加强为除掉一个测度为零的集外, $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

下面的例子属于 Carathéodory.

取 $E=[0,1]$, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\ 1/n\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1/(n+2)\leqslant x<1/(n+1),\\ \text{线性}, & 0<x<1/(n+2),\ 1/(n+1)\leqslant x<1/n\end{cases}$$

(参看图 11). 显然, 对每一 n, f_n 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 因而是 $[0,1]$ 上的可测函数, 而且对每一 $x\in E$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

因此, 集合 E 及 E 上的函数序列 $\{f_n\}$ 满足 Егоров 定理的条件.

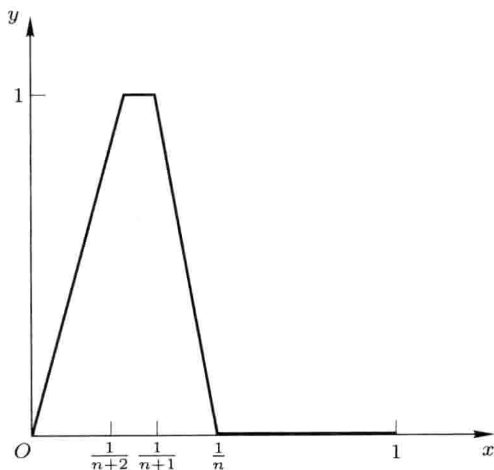


图 11

我们将要证明, 不存在测度为零的集 $e\subset E$, 使 $\{f_n\}$ 在 $E\setminus e$ 上一致收敛于零.

事实上, 假若不然, 即存在具有上述性质的测度为零的集 e, 那么 $m(E\setminus e)=1$. 容易证明, 这时 $x=0$ 必为 $E\setminus e$ 的聚点. 因为如果 $x=0$ 是 $E\setminus e$ 的孤立点, 那么必有 $\delta>0$ 使 $(0,\delta)\subset e$, 这与 $me=0$ 发生矛盾. 由于 $x=0$ 是 $E\setminus e$ 的聚点, 因而存在 $x_n\in E\setminus e, n=1,2,\cdots$, 使

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

于是, 对任意的 $N>0$, 必有 $n>N$, 使

$$0<x_n<1/(N+1).$$

因而必有整数 $k\geqslant 0$, 使

$$1/(N+k+2)\leqslant x_n<1/(N+k+1).$$

据函数 f 的定义, 有

$$f_{N+k}(x_n)=1,\quad x_n\in E\setminus e.$$

这与 $\{f_n\}$ 在 $E\setminus e$ 上一致收敛于零发生矛盾. 因此不存在测度为零的集 $e\subset E$, 使 $\{f_n\}$ 在 $E\setminus e$ 上一致收敛于零.

13. R^1 上的一个函数序列, 使 Егоров 定理不成立.

第一例 取 $E=(-\infty,+\infty)$, 并令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[n,n+1],\\ 0, & x\overline{\in}[n,n+1].\end{cases}$$

易见, 对每一 $x\in E$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\equiv 0.$$

因此, Егоров 定理中除 $mE<+\infty$ 不满足外, 其他的条件都是满足的, 此时 Егоров 定理的结论不再成立, 即存在某个正数 δ 及适合条件 $me<\delta$ 的可测集 e, 使 $\{f_n\}$ 在 $E_\delta=E\setminus e$ 上不一致收敛于 f. 事实上, 取 $\delta=1$ 及可测集 e $(me<1)$, 由于对任意的整数 n, 都有 $m[n,n+1]=1$, 所以 $E_\delta=E\setminus e$ 与 $[n,n+1]$ 之交决非空集:

$$E_\delta\cap[n,n+1]\neq\varnothing\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此, 对任意的 n, 存在 $x_n\in E_\delta\cap[n,n+1]$, 在这种点上 $f(x_n)=0$, 而 $f_n(x_n)=1$. 由此可见,

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=1,$$

即 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上不一致收敛于 f.

第二例 取 $E=(-\infty,+\infty)$, 并令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & -n\leqslant x\leqslant n,\\ 1, & x\leqslant-(n+1),\ x\geqslant n+1,\\ \text{线性}, & -(n+1)\leqslant x\leqslant -n,\ n\leqslant x\leqslant n+1.\end{cases}$$

易见, f_n 在 E 上连续且处处收敛于 $f\equiv 0$ (参看图 12).

取 $\delta=1$ 及可测集 e $(me<1)$. 由 f_n 的定义可知, 存在 $x_n\in E_\delta=E\setminus e$, 使 $f_n(x_n)=1$. 足见 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上不一致收敛于 f.

注 第二例中的函数序列是连续的, 并且它处处收敛于一个连续函数. 可见条件 $mE<+\infty$ 是不能去掉的. 去掉以后, 虽加强为连续函数序列处处收敛于连续函数, Егоров 定理的结论还是不成立.

14. 一个不可测函数序列, 使 Егоров 定理不成立.

设 A_m $(m=1,2,\cdots)$ 是第七章例 15 中的 $[0,1]$ 内的不可测集, 其中 $m_*A_m=m_*A_n$, $m^*A_m=m^*A_n, n,m$ 为任意的正整数. 在 $\cup_{m=1}^{\infty}A_m$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$

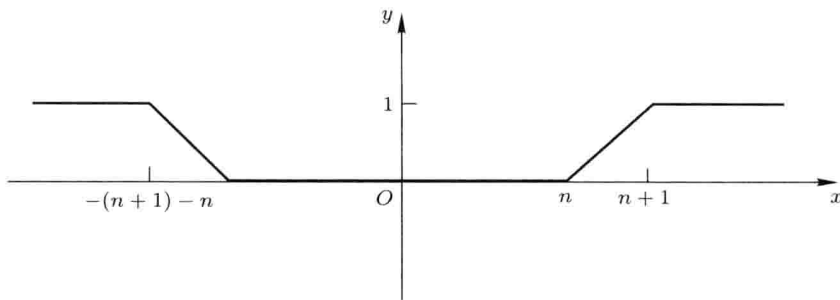


图 12

如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n, \\ 0, & x \in \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \setminus A_n \right). \end{cases}$$

任取 $x_0 \in \cup_{m=1}^{\infty} A_m$, 则 x_0 必属于某个 A_{n_0}. 据 f_n 的定义, 当 n 充分大后, $f_n(x_0) = 0$, 可见 $\{f_n\}$ 在 $\cup_{m=1}^{\infty} A_m$ 上处处收敛于函数 $f \equiv 0$.

现取 $0 < \varepsilon < m^* A_n$ 及任意可测集 $S, mS < \varepsilon$. 于是 $S \supset A_n$ 对任何正整数 n 均不能成立. 换句话说, 存在 $x \in (\cup_{m=1}^{\infty} A_m) \setminus S$ 使得 $f_n(x) = 1$ (x 可能随 n 而变动). 由此可知, $\{f_n\}$ 在 $(\cup_{m=1}^{\infty} A_m) \setminus S$ 上并不一致收敛于 $f \equiv 0$. 由于 S 是任取的可测集, 因而对于上面的函数序列 $\{f_n\}$, Егоров 定理不成立.

注 Егоров 定理是对可测集上的可测函数序列而言的, 上述反例说明了对于不可测函数序列, Егоров 定理的结论未必成立.

15. 一族函数 $\{f_t(x)\}(t \geqslant 2)$, 对每一固定的 t, 它是 x 的可测函数, 而对每一固定的 x, 它是 t 的可测函数, 且 $\lim_{t\to+\infty} f_t(x) = 0$, 但 $\{f_t(x)\}$ 并不近一致收敛.

设对每一 t, $f_t(x)$ 是定义在可测集 D 上的函数. 我们称函数族 $\{f_t(x)\}$ 在 D 上近一致收敛, 是指对任意 $\delta > 0$, 存在 D 的可测子集 D_δ, 使 $m(D \setminus D_\delta) < \varepsilon$, 且当 $t \to +\infty$ 时, $\{f_t(x)\}$ 在 D_δ 上关于 x 一致收敛.

Егоров 定理是说, 设 $mE < \infty$, 则定义在 E 上的几乎处处收敛的可测函数序列必定是近一致收敛的. 于是便产生问题, 可否把关于可测函数序列的 Егоров 定理推广到可测函数族上去? Walter [171] 指出, 这个问题的答案是否定的. 他的例子如下: 设 $A \subset [0, 1/2)$ 为一不可测集, 且对任意两个不同的有理数 r, s, 集 $r + A = \{r + a : a \in A\}$ 与 $s + A = \{s + a : a \in A\}$ 互不相交. 这种不可测集的存在性可参看第七章例 15. 集 $A_n = A + 1/n$ ($n = 2, 3, \cdots$) 都是 $D = [0, 1]$ 的两两不相交的不可测子集, 且

$$m^* A = m^* A_n = \alpha > 0,$$

这里, m^*A 代表 A 的 (L) 外测度.

我们定义函数族如下: 当 $x \in A_n$ $(n=2,3,\cdots)$ 时, $f_{n+x}(x)=1$, 而在 $D \times [2,+\infty)$ 的其他点 (x,t) 上, 令 $f_t(x)=0$. 以 Q_n 表示 (x,t) 一平面内的正方形 $D \times [n,n+1]$, $D_n=\{(x,n+x): x \in D\}$ 表示 Q_n $(n \geqslant 2)$ 的对角线, 当 $(x,t) \in D_n$ 且 $x \in A_n$ 时, 令 $f_t(x)=1$, 而在 Q_n $(n=2,3,\cdots)$ 的其他点处, 令 $f_t(x)=0$. 容易看出, 函数 $f_t(x)$ 具有性质: 对每一固定的 t, $f_t(x)$ 在 D 上为零, 而只有一个可能的例外点 x, 使 $f_t(x)=1$, 对固定的 x, 因为 A_n 两两不相交, 所以 $f_t(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为零, 而只有 t 的一个值可使 $f_t(x) \neq 0$. 由此可见, 函数族 $\{f_t(x)\}$ 适合可测性的条件, 且对每一 $x \in D$, 有

$$\lim_{t \to +\infty} f_t(x)=0.$$

注意, 当 $x \in B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \cdots$ 时, 有

$$g_n(x)=\sup\{f_t(x): t \geqslant n\}=1, \tag{1}$$

而当 $x \overline{\in} B_n$ 时, $g_n(x)=0$. 兹证当 $t \to +\infty$ 时, $\{f_t(x)\}$ 在 D 上并不近一致收敛于 0. 假定在 $D \setminus N$ 上, $f_t(x) \to 0$ $(t \to +\infty)$ 一致地成立, 那么, 对于 $\varepsilon=1/2$ 而言, 存在正数 p, 使当 $t \geqslant p$ 时有

$$f_t(x)<1/2.$$

由等式 (1) 可知, $N \supset B_p \supset A_p$, 因而

$$m^*N \geqslant m^*A_p=\alpha>0.$$

这个不等式说明了函数族 $\{f_t(x)\}$ 不是近一致收敛的.

16*. $[0,1]$ 上的一个连续函数, 它在 $[0,1]$ 上几乎处处取有理数值, 而在任何非空子区间上均非常值函数.

下面的构造法属于 Robert [140].

令

$$f_{10}(x)=1/2-|x-1/2|, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

在 $f_{10}(x)$ 的图像的每个倾斜线段的中点处, 取长度为 3/8 的水平线段, 这些水平线段的中点与倾斜线段的中点相重合. 然后依次连接倾斜线段的端点与水平线段的端点, 并删去原来的倾斜线段. 于是, 我们得到一条新的折线, 它所代表的函数记作 $f_{11}(x)$ (参看图 13). 在 $f_{11}(x)$ 的图像上的每个水平线段中点处, 取一个底长为 1/16, 高为 1/32 的锯齿形折线, 用以代替相应的水平部分的线段. 于是, 我们又得到一条新的折线, 它所代表的函数记作 $f_{12}(x)$ (参看图 14).

$f_{12}(x)$ 的图像上有四条不相交的水平线段, 在每条水平线段的中点处, 取一个底长为 1/64, 高为 1/128 的锯齿形折线, 用以代替相应的水平部分的线段. 这四个锯齿形折线的底的总长是 1/16. 这样一来, 我们又得到了一条新的折线, 它所代表

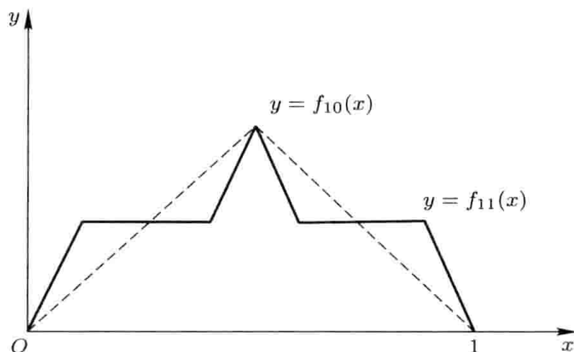


图 13

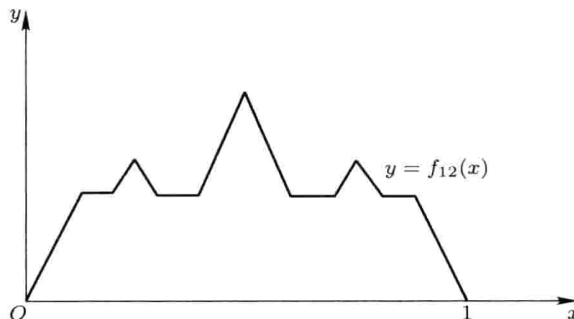


图 14

的函数记作 $f_{13}(x)$. 如此继续下去. 一般, $f_{1n}(x)$ 的图像有 2^n 条水平线段, 其锯齿形折线的底的总长是 $1/8 + 1/16 + \cdots + 1/2^{n+1}$.

函数序列 $\{f_{1n}(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个连续函数 $f_1(x)$, 它在一个测度为

$$3/8 + 3/8 - (1/8 + 1/16 + \cdots + 1/2^{n+1}) = 1/2$$

的非稠密集上取值为 1/4.

取 $f_{20}(x) = f_1(x)$. 如同构造函数 $f_{11}(x)$ 一样, 在 $f_{20}(x)$ 的图像的每个倾斜线段的中点处, 取长度等于这个倾斜线段的两个端点的横坐标之间的距离的 3/4 的水平线段. 然后, 依次连接倾斜线段的端点与水平线段的端点, 并删去原来的倾斜线段. 如此得到的一条折线, 其代表的函数记作 $f_{21}(x)$. 再采用构造 $f_{1n}(x)$ 的方法, 可构造函数 $f_{2n}(x)$. $\{f_{2n}(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个连续函数 $f_2(x)$, 它在测度为 3/4 的集上取有理数值.

如此继续下去, 我们得到了一个连续函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \cdots$, 此函数序列在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个连续函数 $f(x)$, 它在测度为 1 的集上取有理数

值, 且对任何非空区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, f 在 (α,β) 上并非为一常数.

注 Smital [156] 构造了一个有界变差的连续函数 f 和一个具有介值性质的可测函数 g, 使 $f+g$ 仅取有理数值.

17. 一个无处连续的可测函数, 不论怎样改变此函数在任何测度为零的集上的值, 它仍然是无处连续的.

在 $[0,1]$ 内作一可测集 E, 使对任何开区间 $I\subset[0,1]$, 恒有

$$m(I\cap E)>0,\quad m(I\cap E^c)>0$$

(参看第七章例 14). 在 [0, 1] 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus E.\end{cases}$$

易见, f 是 [0, 1] 上的一个无处连续的可测函数.

任取 [0, 1] 的测度为零的子集 e, 并在 e 上任意改变函数 f 的值, 即可设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,1]\setminus e,\\ \varphi(x), & x\in e,\end{cases}$$

或

$$F(x)=\begin{cases}1, & x\in E\setminus e,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus(E\cup e),\\ \varphi(x), & x\in e,\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是 e 上的任意函数. 由于对任意开区间 $I\subset[0,1]$, 恒有

$$m(I\cap(E\setminus e))>0;\quad m(I\cap(E\setminus e)^c)>0,$$

所以 F 在 $[0,1]$ 上仍然是一个无处连续的函数.

注 这个例子也说明了不能把 Лузин 定理的结论加强为 "存在闭集 $F\subset E$, 使 $m(E\setminus F)=0$, 而 f 在闭集 F 上是连续的".

18. 不能把 Лузин 定理中的连续函数改为多项式.

取 $E=[0,1]$, $f(x)=\sin x$ 及正数 ε 适合 $0<\varepsilon<1$. 若有闭集 $F\subset E$, 使 $m(E\setminus F)<\varepsilon$, 且在 F 上 $f(x)$ 等于某个多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

则 $f(x)-P(x)$ 在 F 上恒等于零. 由 $m(E\setminus F)<\varepsilon$ 得到 $mF>0$, 所以

$$f(x)-P(x)=\sin x-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$$

在 $[0,1]$ 上就有无穷多个零点, 从而当 $k\geqslant n+1$ 时, $\frac{d^k}{dx^k}(f(x)-P(x))$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点, 即 $\cos x$ 或 $\sin x$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点, 这是不可能的. 因此, 不存在闭集 $F\subset E$, 使 $m(E\setminus F)<\varepsilon$ 且在 F 上 $f(x)$ 等于某个多项式 $P(x)$.

19. $[0,+\infty)$ **上的函数序列** $\{f_n\}$ **和** $\{g_n\}$**, 使** $\{f_n\}$ **和** $\{g_n\}$ **在** $[0,+\infty)$ **上分别依测度收敛于** f **和** g**, 而** $\{f_ng_n\}$ **在** $[0,+\infty)$ **上并不依测度收敛于** fg**.**

我们先引进依测度收敛的概念.

设 E 为一可测集, $\{f_n\}$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数序列. 如果有 E 上的几乎处处有限的可测函数 f, 使对任意正数 σ, 都有

$$\lim_{n\to\infty} mE[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=0,$$

则称 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f.

容易证明, 若 $mE<+\infty$, 且 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 E 上分别依测度收敛于 f 和 g, 则 $\{f_ng_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 fg. 应当注意, 在这个命题中, 条件 $mE<+\infty$ 是不能去掉的. 例如, 在 $E=[0,+\infty)$ 上如下定义函数:

$$f(x)\equiv 0,\quad g_n(x)=x,\quad g(x)=x,$$

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,n),\\ 1/x, & x\in[n,+\infty),\end{cases}$$

则对任意正数 σ, 当 n 充分大后, 就有

$$E[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=\varPhi.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f. 又, $\{g_n\}$ 在 E 上显然依测度收敛于 g. 但是, $\{f_ng_n\}$ 在 E 上并不依测度收敛于 $fg\equiv 0$, 这是因为对任意正整数 n, 恒有

$$E[x:|f_n(x)g_n(x)-0|\geqslant 1]=[n,+\infty),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} mE[x:|f_n(x)g_n(x)|\geqslant 1]=+\infty.$$

20. 一个依测度收敛的可测函数序列 $\{\varphi_n\}$ **和连续函数** F**, 而构成并不依测度收敛的复合函数序列** $\{F\circ\varphi_n\}$**.**

容易证明, 若 $mE<+\infty$, 且函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上依测度收敛于函数 φ, F 是 R^1 上的连续函数, 则复合函数序列 $\{F\circ\varphi_n\}$ 在 E 上必定依测度收敛于 $F\circ\varphi$. 应当注意, 在这个命题中条件 $mE<+\infty$ 是不能去掉的. 例如, 取 $E=[0,+\infty)$, 并在 E 上定义函数:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,n),\\ 1/x, & x\in[n,+\infty),\end{cases}$$

$$f(x)\equiv 0,\quad g_n(x)=x,\quad g(x)=x,$$

则 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 E 上分别依测度收敛于 f 和 g. 容易看出, 若令 $\varphi_n=f_n+g_n$, 则 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 g. 兹证 $\{\varphi_n^2\}$ 在 E 上并不依测度收敛于 g^2. 事实上, $\varphi_n^2=f_n^2+g_n^2+2f_ng_n$, 而易见 $\{f_n^2\}$ 和 $\{g_n^2\}$ 在 E 上分别依测度收敛于 f^2 和 g^2, 因此, 如果 $\{\varphi_n^2\}$ 在 E 上依测度收敛于 g^2, 那么 $\{f_ng_n\}$ 在 E 上应该依测度收

敛于 fg. 然而, 例 19 已经指出, $\{f_n g_n\}$ 并不依测度收敛于 fg. 这个矛盾表明了 $\{\varphi_n^2\}$ 在 E 上并不依测度收敛.

由上面的论述可知, 对 R^1 上的连续函数 $F(x)=x^2$ 而言, 从 $\{\varphi_n\}$ 的测度收敛性推不出复合函数序列 $\{F\circ\varphi_n\}$ 的测度收敛性.

21*. 一个无处连续的 (L) 可测函数, 它不是 (B) 可测的.

第七章例 33 中的非 Borel 集是 Lebesgue 可测的, 从而它的特征函数是一个 (L) 可测而非 (B) 可测的函数.

现在我们在 $[0,1]$ 上构造一个无处连续的 (L) 可测函数, 而它不是 (B) 可测的. 为此, 在区间 $[0,1]$ 内作一可测集 E, 使对任一非空开区间 $I\subset[0,1]$, 恒有

$$m(I\cap E)>0,\quad m(I\cap E^c)>0$$

(参看第七章例 14). 又设 e 是 $[0,1]$ 的 (L) 可测子集且 $me=0$, 而它并不 (B) 可测 (参看第七章例 35). 在 $[0,1]$ 上如下定义函数f:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\in e,\\ 1, & x\in E\setminus e,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus(E\cup e).\end{cases}$$

易见, f 是 $[0,1]$ 上的无处连续的 (L) 可测函数. 然而, 由于

$$\{x: f(x)>1\}=e$$

不是 (B) 可测集, 因而 f 不是 (B) 可测函数.

注 设 f 是定义在区间 I 上的函数, 令

$$C_s(f)=\{x\in I:\lim_{h\to0}[f(x+h)-f(x-h)]=0\}.$$

Ponomarev [127] 构造了区间 I 上的一个函数 f, 使集 $C_s(f)$ 不是 (L) 可测的. 他还指出, 若函数 f 在 I 上是 (L) 可测的, 则 $C_s(f)$ 必为 (L) 可测集, 但未必是 (B) 可测集.

22. 两个函数仅在一个 (B) 测度为零的集上彼此相异, 其中一个 (B) 可测而另一个非 (B) 可测.

设 A 为一 (L) 测度为零的 (L) 可测集, 且 A 非 (B) 可测 (参看第七章例 36). 于是, 存在 G_δ 型集 G 而有 $A\subset G$, 且 $mG=mA=0$ (参看 [6], p.49). 在 R^1 上如下定义函数 f 和 g:

$$f(x)\equiv1,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\in R^1\setminus G,\\ 1/2, & x\in G\setminus A,\\ 0, & x\in A.\end{cases}$$

于是, 函数 f 在 R^1 上是 (B) 可测的. 又因为

$$\{x: f(x)\neq g(x)\}=G,$$

而 G 为一 G_δ 型集, 故它是 (B) 可测集且其 (B) 测度为 0. 因此, f 和 g 仅在 (B)

测度为 0 的集 G 上彼此相异. 然而, 由于

$$g^{-1}(0) = \{x : g(x) = 0\} = A$$

不是 (B) 可测集, 因而 g 不是 (B) 可测函数.

注 由于 (L) 测度是一种完备测度, 故两个仅在 (L) 测度为零的集上彼此相异的函数, 它们或者都是 (L) 可测的, 或者都不是 (L) 可测的. 而 (B) 测度是一种不完备的测度, 故两个仅在 (B) 测度为零的集上彼此相异的函数, 其中可能一个是 (B) 可测而另一个不是 (B) 可测的.

同样, 处处收敛的 (B) 可测函数序列的极限函数是 (B) 可测的 (参看 [39], p.59). 但是, 若 $\{f_n\}$ 在集 E 上 (B) 可测, G 是 E 的 (B) 可测子集且其 (B) 测度为零, 又 $\{f_n\}$ 在 $E \setminus G$ 上处处收敛于函数 f, 此时并不能保证 f 是 E 上的 (B) 可测函数. 例如, 设 A 为一 (L) 可测集且其 (L) 测度为零, 但 A 非 (B) 可测. 此时存在 G_δ 型集 G, 使 $G \supset A$ 且 $mG = mA = 0, G$ 是一个 (B) 可测集且其 (B) 测度为零. 在 R^1 上定义函数序列 $f_n(n = 1, 2, \cdots)$ 及函数 f 如下:

$$f_n(x) \equiv 0,\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in R^1 \setminus G, \\ 1/2, & x \in G \setminus A, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 是 R^1 上的 (B) 可测函数序列, 且在 $R^1 \setminus G$ 上, $\{f_n\}$ 处处收敛于 f. 但是, 由于

$$\{x : f(x) > 1/2\} = A$$

不是 (B) 可测集, 从而 f 在 R^1 上不是 (B) 可测的函数.

23. 不与第一类函数中的任何一个函数对等的可测函数.

如所周知, 凡在 $[a, b]$ 上定义的几乎处处有限的可测函数 f, 必定与一个所属类数不大于 2 的函数是对等的 (参看 [27], 中译本 pp.475—476). 然而, 在 $[0, 1]$ 上可构造一个可测函数, 它决不与第一类中的任何一个函数对等.

我们先在闭区间 $[0, 1]$ 的中间去掉长度为 $1/4$ 的开区间, 再从余下的两个闭区间的中间各自去掉长度为 $1/4^2$ 的开区间, 如此继续下去. 去掉的开区间的并集为一开集, 记为 G_1, 它在 $[0, 1]$ 中稠密, 且

$$mG_1 = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4^2} + \cdots + 2^n \times \frac{1}{4^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{2},$$

而 $E_1 = [0, 1] \setminus G_1$ 为一完备疏集, 且

$$mE_1 = mG_1 = \frac{1}{2}.$$

将 $[0, 1]$ 相似地变换到 G_1 的每个构成区间 (a_{1k}, b_{1k}) 上 $(k = 1, 2, \cdots)$, 即对 E_1 的各个邻接区间 (a_{1k}, b_{1k}) $(k = 1, 2, \cdots)$, 作由 $[0, 1]$ 到 $[a_{1k}, b_{1k}]$ 上的相似变换 $y = a_{1k} + (b_{1k} - a_{1k})x$, 则

$$\{a_{1k} + (b_{1k} - a_{1k})x : x \in E_1\}$$

是 $[a_{1k}, b_{1k}]$ 的完备疏集, 其测度等于 $\frac{1}{2}(b_{1k} - a_{1k})$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 所有这种疏集的全部邻接区间记为 G_2, 它是一个开集, 且

$$mG_2 = \frac{1}{2^2}.$$

令 $[0,1] \setminus G_2 = E_1 \cup E_2$, 则

$$mE_2 = \frac{1}{2^2}.$$

再将 $[0,1]$ 相似地变换到 G_2 的每个构成区间上, 就得到开集 G_3, 且

$$mG_3 = \frac{1}{2^3}.$$

令 $[0,1] \setminus G_3 = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 则

$$mE_3 = \frac{1}{2^3}.$$

如此继续下去. 令

$$E = E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \cdots,$$

则得

$$[0,1] \setminus E \supset E_2 \cup E_4 \cup E_6 \cup \cdots.$$

对每个 k, 开集 G_k 在 $[0,1]$ 中稠密, 而且 G_k 是由长度不超过 $1/4^k$ 的开区间所构成, 所以任取开区间 $J \subset [0,1]$, 只要 k 充分大, 就有 G_k 的某个构成区间含于 J 中. 还应注意, G_k 的每个构成区间含有 E_{k+1} 的子集, 而此子集的测度大于零, 所以下列关系

$$m(E \cap J) > 0, \quad m(J \setminus (E \cap J)) > 0 \tag{1}$$

同时成立.

今在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus E, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的可测函数. 设 g 为 f 的任一对等函数, 并令

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} = N,$$

则 $mN = 0$, 且由 (1) 可知, 下列点集

$$(E \cap J) \setminus (E \cap N \cap J), \quad (J \setminus (E \cap J)) \setminus N \cap (J \setminus (E \cap J))$$

的测度均为正数. 当 x 属于前者的集合时, $g(x) = f(x) = 1$, 而当 x 属于后者的集合时, $g(x) = f(x) = 0$. 由此推得 g 于 $[0,1]$ 内的任一子区间上的振幅都等于 1, 因而 g 于 $[0,1]$ 的每一点上的振幅亦等于 1. 因此, g 必于一正测度的完备集上处处间断. 因为作为连续函数序列的极限函数, 必须有一个稠密的连续点集合 (参看 [46], pp.99—102), 所以 g 不可能是连续函数序列的极限, 即 g 至少为第二类函数.

24. 属于不同类的两个函数, 而有相同的间断点.

设 P_0 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, 在闭区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g 如下:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0,\\ 0, & x\in G_0=[0,1]\setminus P_0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0 \text{ 且 } x \text{ 不是 } P_0 \text{ 的邻接区间的端点},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

易见, G_0 中的点都是这两个函数的连续点, 而 P_0 中的点都是它们的间断点. 因此, 这两个函数有完全相同的间断点. 因为 f 是闭集 P_0 的特征函数, 所以它是第一类的函数 (参看 [27], 中译本 p.491). 而 g 作为限制在 P_0 上的函数时, 它在 P_0 中的每一点上都不是连续的, 从而据 Baire 定理 (参看 [27], 中译本 pp.485—487), g 不是每一类的函数.

25. 一个 F_σ 型集的特征函数, 它不是第一类函数.

如所周知, 有界闭集的特征函数是第一类的函数 (参看 [27], 中译本 p.491). 然而, F_σ 型集的特征函数不必是第一类的函数. 为说明这一陈述, 我们在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数 φ:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 φ 不可能是连续函数序列的极限, 所以它不是第一类的函数. 但是, 如果我们将 $[0,1]$ 中所有的有理数写成

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots,$$

并设

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_k\}_{k=1}^n,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\{r_k\}_{k=1}^n,\end{cases}$$

则对每一 n, 函数 φ_n 仅含有限个不连续点, 因而它是第一类的函数 (参看 [27], 中译本 p.476). 因为 $\varphi(x)$ 是 $\varphi_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限函数, 所以它属于第二类.

因为有理数集是可数的, 所以它是一个 F_σ 型的集. 由此可知. F_σ 型集的特征函数不必是第一类的函数, 它可能是第二类的函数.

26. 一个 (R) 可积函数, 它不是第一类的函数.

下面的例子是由 Wilansky [173] 作出的.

设 K 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 完备疏集, $\{x_n\}$ 是 K 中的点列, 它在 K 中稠密. 例如, 可取 K 的一切邻接区间的端点作为点列 $\{x_n\}$. 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f

如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}K,\\ 1, & x=x_n \text{ 对某个 } n,\\ 2, & x\in K \text{ 且对任何 } n,\ x\neq x_n.\end{cases}$$

于是, f 在 $[0,1]$ 中的测度为 1 的子集 $[0,1]\setminus K$ 上连续 (这里, $mK=0$), 从而它在 $[0,1]$ 上是 (R) 可积的. 然而, f 作为限制在完备集 K 上的函数, 它无连续点. 因此, f 不是第一类的函数 (参看 [27], 中译本 pp.485—487).

27. 不与 (R) 可积函数对等的有界可测函数.

例 17 中的函数是有界可测的, 它不与 (R) 可积函数对等.

下面的例子是由 Wilansky [173] 作出的.

设 E 是单位区间 I 中包含了 I 的全体有理数的开集, 使 $mE<1/2$. f 是 E 的特征函数. 显然, f 在 I 上是上半连续的, 从而它是第一类的函数. 因此, f 在 I 上有界可测. 假设 g 是 I 上与 f 几乎处处相等的函数, 那么存在零测度集 H, 使当 $x\in E\setminus H$ 时, $g(x)=1$, 而当 $x\in E^c\setminus H$ 时, $g(x)=0$. 由于 E 包含了 I 的稠密子集 (I 的有理数子集), 因而 E 在 I 中稠密, $E\setminus H$ 在 I 中也稠密. 因此, 在 I 的一个稠密子集上, $g(x)=1$. 可见 g 在 $E^c\setminus H$ 上无处连续. 而 $m(E^c\setminus H)>1/2$, 故 g 在 I 上不可能是 (R) 可积的.

第九章

Lebesgue 积分

---

0. 引言.

这一章例子主要处理的是可测集上的 Lebesgue 积分, 个别例子也涉及 Lebesgue-Stieltjes 积分. 基本定义和性质给出如下:

在 E 上定义的简单函数 φ 有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k x_{e_k}(x),$$

其中 $e_k=\{x:\varphi(x)=y_k\}$ 等为互不相交的可测集, 且 $E=\cup_{k=1}^{n} e_k, y_k$ 等互异, 而 $x_{e_k}(x)$ 表示 e_k 的特征函数. 我们称和数 $\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k$ 为简单函数 φ 在 E 上的 Lebesgue 积分, 并记为

$$(L)\int_E \varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{n} y_k m e_k, \tag{1}$$

或简写为 $\int_E \varphi dx$.

设 f 是有界可测集 E 上的可测函数, 对于 $f(x)\geqslant 0$ 的情形, 取 φ 为任一满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)\,(x\in E)$ 的简单函数, 让 φ 变动, 我们定义 f 在 E 上的 Lebesgue 积分为

$$(L)\int_E f(x)dx=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E \varphi(x)dx, \tag{2}$$

上式右边为一非负数, 也可能是 $+\infty$. 如果此量为有限, 则称 f 在 E 上 Lebesgue可积, 简称 (L) 可积或可积 (本章除了特别声明外, 所指的积分均为 Lebesgue 积分), 否则只称 f 在 E 上的积分为 $+\infty$. 对于一般可测函数 f, 当 $\int_E f^+(x)dx$ 与 $\int_E f^-(x)dx$

不同时为 $+\infty$ 时, 定义 f 在 E 上的积分为

$$(L)\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx, \tag{3}$$

其中

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)<0,\end{cases}\qquad f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 0, & f(x)>0.\end{cases}$$

当 (3) 右边两项都是有限数时, 也只有在这时, f 的积分是有限的, 我们称 f 在 E 上可积, 记为 $f\in L(E)$ 或简记为 $f\in L$.

注意, 当 f 是 E 上的简单函数时, f 的积分定义 (2), (3) 与上面定义 (1) 相一致.

至于无界集上的积分, 可以采用处理无界集测度的方法. 设 f 是定义在整个空间 R^1 上的可测函数. 取一渐张的区间序列 $\{\Delta_k\}:\Delta_1\subset\Delta_2\subset\cdots$, 且 $\cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k=R^1$. 若极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}|f(x)|dx$$

存在且有限 (可以证明, 这个极限必然不依赖于 $\{\Delta_k\}$ 的选择), 就称 f 在空间 R^1 上可积, 积分记为

$$\int_{R^1}f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}f(x)dx.$$

如果所考虑的函数 f 只在 R^1 的一个子集 E 上有定义, 那么 f 在 E 上的积分可以在形式上改写成整个空间 R^1 上的积分来讨论, 因为引进集 E 的特征函数 $\chi_E(x)$ 时, 可以认为函数 $f(x)\chi_E(x)$ 在整个空间有定义 (在 E^c 上它等于 0) 而且有

$$\int_E f(x)dx=\int_{R^1}f(x)\chi_E(x)dx,$$

于是, f 在 E 上的可积性就化为 $f\chi_E$ 在 R^1 上的可积性.

积分的性质:

1° 若函数 f 在有限区间 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则它在 $[a,b]$ 上 (L) 可积, 并且这些积分彼此相等:

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_{[a,b]}f(x)dx.$$

2° 设 f,g 在 E 上都可积, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

3° 设 f 是 E 上的可测函数, 则 f 在 E 上可积的充要条件是 $|f|$ 在 E 上可积.

4° 设 f 在 E 上可积, 则对任何实数 c, cf 在 E 上也可积, 并且

$$c\int_E f(x)dx=\int_E cf(x)dx.$$

5° 设 f, g 在 E 上都可积, 则 $f+g$ 也可积, 且

$$\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx=\int_E[f(x)+g(x)]dx.$$

6° $\int_E|f(x)|dx=0$ 当且仅当 f 在 E 上几乎处处等于零.

7° (绝对连续性) 设 f 在 E 上可积, 则对任一正数 ε, 有正数 δ, 使当 $me < \delta$ $(e \subset E)$ 时, 就有

$$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

8° 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数序列, 且 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

9° (完全可加性) 设 f 是 E 上的可测函数且在 E 上有积分值, 即 $\int_E f^+(x)dx$ 与 $\int_E f^-(x)dx$ 不同时为 $+\infty$, 又 $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 是一串互不相交的可测集合, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx.$$

10° **(Levi 定理)** 设可测函数序列 $\{f_n\}$ 满足下面的性质:

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则有

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

11° **(Fatou 引理)** 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数序列, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

12° **(Lebesgue 控制收敛定理)** 设可测函数序列 $\{f_n\}$ 满足下述条件: $\{f_n\}$ 的极限函数存在, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 且存在可积函数 g 使

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad (x \in E,\ n = 1, 2, \cdots),$$

那么, f 可积且有

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

推论 (Lebesgue 有界收敛定理) 设 $mE < +\infty$, E 上的可测函数序列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n(x)| \leqslant M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \cdots)$, M 为常数, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 则 f 可积且有

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

13° **(Vitali 定理)** 设 $mE < +\infty$, $\{f_n\}$ 是 E 上的可积函数序列, $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, $\{f_n\}$ 的积分具有等度的绝对连续性, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使对于任意 $A, mA < \delta$, 则

$$\left|\int_A f_n(x)dx\right| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

在这些条件下, f 在 E 上可积, 且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

现在再引进函数空间 $L^p(E)$.

设 E 是 R^1 中给定的可测集, f 是定义在 E 上的可测函数. 设 $p>0$, 若 $|f|^p$ 在 E 上可积, 则称 f 是 p 次幂可积的. 一切 p 次幂可积的函数记作 $L^p(E)$, 或简记为 L^p, 其中几乎处处相等的函数看作同一元素. 可以证明:

1° $L^p(E)$ 是线性空间.

2° **(Hölder 不等式)** 设 $1<p<+\infty, 1/p+1/q=1$, 则对任何 $f\in L^p(E)$, $g\in L^q(E)$, 有 $fg\in L(E)$, 且有不等式

$$\left|\int_E fgdx\right| \leqslant \left\{\int_E |f|^p dx\right\}^{1/p} \left\{\int_E |g|^q dx\right\}^{1/q}.$$

对于 $L^p(E)(p\geqslant 1)$ 的元 f, 如果引进记号

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left\{\int_E |f|^p dx\right\}^{1/p},$$

称 $\|f\|_{L^p(E)}$ 为 f 的范数, 那么 Hölder 不等式可写成

$$\left|\int_E fgdx\right| \leqslant \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}.$$

3° **(Minkowski 不等式)** 设 $f, g\in L^p(E)$ $(p\geqslant 1)$, 则有不等式

$$\|f+g\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}.$$

我们称定义在可测集 E 上的可测函数是本性有界的, 是指除去 E 中的某个零测度集外, 在它的余集上是有界的. 令 $L^\infty(E)$ 表示 E 上本性有界可测函数的全体, 凡是几乎处处相等的函数看作同一元素. 在 $L^\infty(E)$ 中定义

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \inf_{\substack{mE_0=0\\ E_0\subset E}} \left\{\sup_{x\in E\setminus E_0} |f(x)|\right\},$$

称 $\|f\|_{L^\infty(E)}$ 为 f 的范数.

关于 Lebesgue 积分的更多的材料, 可参看 [8], [14] 和 [18].

1. $[0,1]$ **上的一个** (L) **可积函数** f, **使** $\sum_{n=1}^\infty nmE[x: f(x)\geqslant n]=+\infty$.

在 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上非负可测且 (L) 可积. 但是,

$$\sum_{n=1}^\infty nmE[x: f(x)\geqslant n] = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty.$$

注 容易证明, 设 f 是定义在 E 上的可测函数, 如果

$$\sum_{n=1}^\infty nmE[x: f(x)\geqslant n] < +\infty,$$

那么 f 在 E 上必定是 (L) 可积的. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

2. $[0,+\infty)$ **上的一个非负连续的** (L) **可积函数** f, **使** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ **不成立.**

令 $\delta_n = 1/(n2^n), n = 1,2,\cdots$, 在 $[0,+\infty)$ 上定义函数 f : 当 $x = n$ 时, $f(x)=n$; $f(n-\delta_n)=f(n+\delta_n)=0$; 在 $(n-\delta_n,n)$ 及 $(n,n+\delta_n)$ 上 f 为线性; 在 $[0,1/2]$ 及 $(n+\delta_n,(n+1)-\delta_n)$ 上 f 的值为零. 则 f 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-\delta_n}^{n+\delta_n} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

即, f 在 $[0,+\infty)$ 上是 (L) 可积的. 然而, 容易看出, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 并不存在 (参看图 15).

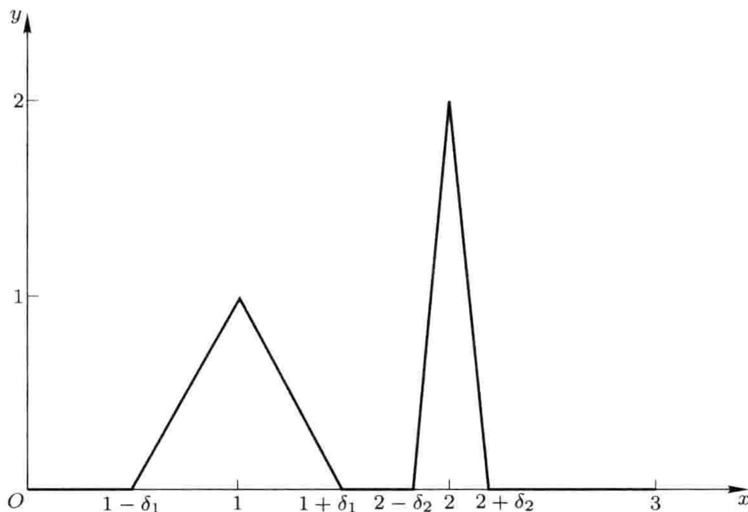


图 15

注 可以证明, 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上 (L) 可积且一致连续, 那么 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 上述反例说明了在这个命题中, f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续的条件不能减弱为连续.

3. **可测集** E **上的非负有界可测函数序列** $\{f_n\}$, **使** $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 0$, **而** $\{f_n\}$ **却无处收敛于零.**

首先注意, 对于任意自然数 n, 可以而且是唯一地表示成 $n = 2^k + i$ (这里 $k=0,1,2,\cdots$; $0\leqslant i\leqslant 2^k-1$). 现在给出函数序列 $\{f_n\}$. 当 $n=2^k+i$ 时, 设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{i}{2^k}\leqslant x < \dfrac{i+1}{2^k}, \\ 0, & [0,1] \text{ 中其余的点}. \end{cases}$$

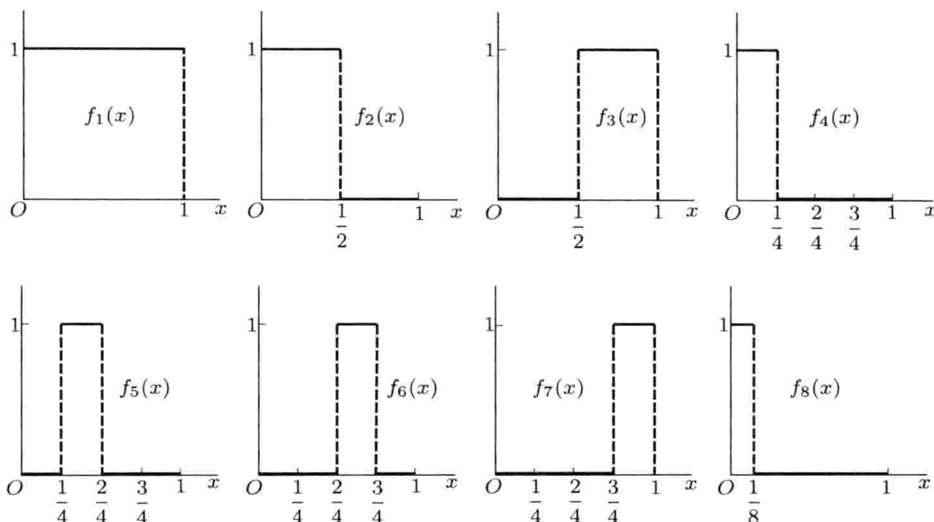


图 16

显然有 (参看图 16)

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2^k}.$$

因为当 $n \to \infty$ 时, k 也趋于无穷, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

但是, $\{f_n\}$ 在闭区间 $[0,1]$ 的无论哪一点上都不趋于零.

4. $[0,1]$ **上的一个实值连续函数序列** $\{f_n\}$**, 使** $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \geqslant 0$**, 且若有连续函数** f **适合** $f_n(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ $(n = 1,2,\cdots)$**, 则** $f \equiv 0$**. 但** $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq 0$.

下面的例子是由 Kestelman [97] 作出的.

用长度之和为 1/2 的一串开区间覆盖 $[0,1]$ 中的全体有理点, K 表 $[0,1]$ 中未被这些开区间覆盖的点, 则 K 为一闭的无处稠集. 对每一 $x \in [0,1]$, 令

$$f_n(x) = (1 - d(x,K))^n, \quad n = 1,2,\cdots,$$

这里, $d(x,K)$ 代表点 x 到闭集 K 之间的距离:

$$d(x,K) = \inf_{y\in K}|x-y|.$$

于是, 每个函数 f_n 在 $[0,1]$ 上都是连续的, 且对任一 $x \in [0,1]$, 有

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

此外, 对任何正整数 n, 有

$$\int_0^1 f_n(x)dx \geqslant \frac{1}{2},$$

这是因为当 $x \in K$ 时, $f_n(x)=1$, 而 K 的 (L) 测度 $\geqslant 1/2$.

假定 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 对每一有理点 $q \in [0,1]$, 都有 $0 \leqslant f(q) \leqslant f_n(q)$ $(n=1,2,\cdots)$, 则因对任一有理点 q, 有 $1-d(q,K)<1$, 故从 f 的连续性得到 $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$.

5. 一个在 E 上并不依测度收敛于零的函数序列 $\{f_n\}$, 使对每一可测集 $e \subset E$, 都有 $\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx=0$.

在 $E=[0,1)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \dfrac{2i}{2n} \leqslant x < \dfrac{2i+1}{2n},\\ -1, & \dfrac{2i+1}{2n} \leqslant x < \dfrac{2i+2}{2n}, \quad i=0,1,2,\cdots,n-1.\end{cases}$$

显然, 对任一 $\alpha \in [0,1)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\alpha f_n(x)dx=0.$$

于是, 对任意的开区间 $(\alpha,\beta) \subset [0,1)$ 恒有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\beta f_n(x)dx-\lim_{n\to\infty}\int_0^\alpha f_n(x)dx=0.$$

设 G 为 $[0,1)$ 的任一开子集, 则 G 可表成可数个或有限个两两不相交的开区间的并集:

$$G=\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m.$$

据测度的完全可加性, 有

$$mG=\sum_{m=1}^{\infty} mI_m \leqslant 1.$$

于是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} mI_m < \varepsilon/2.$$

因此,

$$\left|\int_{\bigcup\limits_{m=N+1}^{\infty} I_m} f_n(x)dx\right| \leqslant \int_{\bigcup\limits_{m=N+1}^{\infty} I_m} |f_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又当 n 充分大后, 有

$$\left|\int_{\bigcup\limits_{m=1}^{N} I_m} f_n(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因而当 n 充分大后, 就有

$$\left|\int_G f_n(x)dx\right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_G f_n(x)dx = 0.$$

由此可见, 对任意的闭集 $F\subset[0,1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_F f_n(x)dx = 0.$$

从而对任意的 F_σ 型集 $A\subset[0,1)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = 0.$$

设 e 为 $E=[0,1)$ 的任一可测子集, 则有 F_σ 型集 $A\subset e$ 使 $mA=me$ (参看 [6], pp.49—50), 因而

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{e\setminus A} f_n(x)dx + \int_A f_n(x)dx\right) = 0.$$

兹证 $\{f_n\}$ 在 $E=[0,1)$ 上并不依测度收敛于 0. 为此, 取 $\sigma=1/2$, 则

$$E[x:|f_n(x)|\geqslant\sigma]=[0,1),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} mE[x:|f_n(x)|\geqslant\sigma]=1,$$

即 $\{f_n\}$ 在 E 上并不依测度收敛于 0.

注 我们有如下的命题: 若 $\{f_n\}$ 是定义在 E 上的非负可测函数序列, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 0,$$

则 $\{f_n\}$ 在 E 上必定依测度收敛于 0 (参看 [27], 中译本 p.193). 上述反例说明了在这个命题中, 函数序列非负性的条件是不能去掉的. 去掉之后, 虽加强为对每一可测集 $e\subset E$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx = 0,$$

仍不能保证 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 0.

6. 任给趋于零的数列 $\{a_n\}$, 可构造一个非负可测函数序列 $\{f_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_E f_n(x)dx$ 收敛, 而 $\{f_n\}$ 在 E 上无处收敛于零.

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 故可选取子列 $\{a_{n_k}\}$, 使

$$|a_{n_k}|\leqslant 1/2^k \quad (k=1,2,\cdots).$$

在可测集 E $(mE<+\infty)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下: 当 n 等于某个 n_k 时, $f_n(x)\equiv 1$; 而当 n 不等于任何一个 n_k 时, $f_n(x)\equiv 0$. 显然, $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数序列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\int_E f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|\int_E dx = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|mE$$
$$\leqslant mE\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = mE<+\infty,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_E f_n(x)dx$ 是收敛的.

另一方面, 对任意的正整数 n, 总可找到正整数 $n_k > n$, 此时 $f_{n_k}(x) \equiv 1$. 可见 $\{f_n\}$ 在 E 上无处收敛于零.

7. 一个 (L) 可积函数 f 和有限个区间的并集 $I(n)$, 使 $\lim_{n\to\infty} \int_{I(n)} f(x)\cos nxdx \neq 0$.

我们有 Riemann-Lebesgue 引理: 设 $f \in L(a,b)$, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda xdx = 0$$

(参看 [8], p.349). Borwein [49] 推广 Riemann-Lebesgue 引理如下: 设 $f \in L(0, +\infty)$, 又对每一正数 $\lambda, I(\lambda)$ 是 $(0,+\infty)$ 的子区间, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{I(\lambda)} f(x)\cos\lambda xdx = 0.$$

事实上, 假定 $I(\lambda) = (a_\lambda, b_\lambda)$, 并令

$$s_\lambda = \int_{I(\lambda)} f(x)\cos\lambda xdx,$$

则

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} f(x)\cos\lambda xdx \\ &= -\int_{a\lambda-\pi/\lambda}^{b_\lambda-\pi/\lambda} f(x+\pi/\lambda)\cos\lambda xdx. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} 2|s_\lambda| &\leqslant \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} |f(x)-f(x+\pi/\lambda)|dx + \int_{a_\lambda}^{a_\lambda+\pi/\lambda} |f(x)|dx + \int_{b_\lambda}^{b_\lambda+\pi/\lambda} |f(x)|dx \\ &= o(1), \quad \text{当 } \lambda\to+\infty \text{ 时}. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{I(\lambda)} f(x)\cos\lambda xdx = 0.$$

Borwein 还指出, 若 $I(\lambda)$ 是有限个区间的并集, 则所述命题不复为真. 他的例子如下: 设

$$I(n) = \bigcup_{r=1}^{n} \left(\frac{(4r-1)}{2n}\pi, \frac{2r}{n}\pi \right), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

f 是区间 $(0, 2\pi)$ 的特征函数, 则 f 在 $(0, 2\pi)$ 上 (L) 可积, 且

$$\int_{I(n)} f(x)\cos nxdx = \sum_{r=1}^{n} \int_{\frac{(4r-1)\pi}{2n}}^{\frac{2r\pi}{n}} \cos nxdx = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I(n)} f(x)\cos nxdx \neq 0.$$

8. (L) 可积而不 (R) 可积的有界函数

函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上是 (L) 可积的. 因为 f 在 $[0,1]$ 上无处连续, 所以它并不 (R) 可积.

注 若有界函数 f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上亦必 (L) 可积, 且二者的积分值相等. 上述反例说明了其逆命题并不成立.

9. 广义 (R) 可积而不 (L) 可积的函数.

第一例 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则广义 (R) 积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

但是

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx=+\infty$$

(参看 [7], p.680). 这意味着 $|f|$ 在 $[0,+\infty)$ 上不是 (L) 可积的, 从而 f 在 $[0,+\infty)$ 上也不是 (L) 可积的.

第二例 在开区间 $(0,1)$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}2n+1, & 1/(2n+2)<x<1/(2n+1),\\ -(2n+2), & 1/(2n+3)\leqslant x\leqslant 1/(2n+2),\end{cases}$$

这里, $n=0,1,2,\cdots$. 易见, f 在 $(0,1)$ 上的广义 (R) 积分存在, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)-(2n+2)\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}.\end{aligned}$$

但是

$$\int_0^1 |f(x)|dx=+\infty,$$

可见 f 在 $(0,1)$ 上不是 (L) 可积的.

注 上述两个反例说明了如果区间 (a,b) 为无穷或者函数在有限区间 (a,b) 上无界, 那么函数在 (a,b) 上的广义 (R) 可积性并不蕴涵该函数在 (a,b) 上的 (L) 可积性. 然而, 可以证明, 如果 f 非负并且广义 (R) 可积, 那么 f 亦必 (L) 可积. 因此, 上述反例也说明了在这个命题中, f 的非负性的条件不可去掉.

10. (L) **可积而不广义** (R) **可积的非负函数.**

第一例 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 (L) 可积的, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0.$$

但 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不广义 (R) 可积.

第二例 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数, 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{|x-b_n|^{\frac{1}{2}}},\quad x\neq b_n;\quad f(b_n)=0,$$

其中 $\{b_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的可数稠密子集. 易见, f 在 $[0,1]$ 上是非负可测函数, 且

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\int_0^{b_n}\frac{dx}{(b_n-x)^{\frac{1}{2}}}+\int_{b_n}^1\frac{dx}{(x-b_n)^{\frac{1}{2}}}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(2b_n^{\frac{1}{2}}+2(1-b_n)^{\frac{1}{2}}\right)\\&\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty,\end{aligned}$$

即 f 在 $[0,1]$ 上是 (L) 可积的. 但是, 无界函数 f 在 $[0,1]$ 上并不广义 (R) 可积.

注 设 f 是 (a,b) 上的非负函数, 若 f 在 (a,b) 上广义 (R) 可积, 则 f 在 (a,b) 上亦必 (L) 可积. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

11. 任给非几乎处处有界函数 f, **可构造一个** (L) **可积函数** g, **使** fg **不** (L) **可积.**

下面的构造法属于 Lebesgue.

不妨设 f 在可测集 $E\ (mE>0)$ 上恒大于零. 于是存在实数序列 $\{a_n\}$, 适合

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots,\quad n\leqslant a_n,$$

且

$$mE_n=\eta_n\neq 0,$$

其中 $E_n=E[x:a_n\leqslant f(x)<a_{n+1}]$. 在 E 上定义函数 g :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{na_n\eta_n}, & x\in E_n,\ n=1,2,\cdots,\\ 0, & x\in E\diagdown\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n.\end{cases}$$

于是, 一方面

$$\int_E g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{na_n\eta_n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty,$$

另一方面

$$\int_E f(x)g(x)dx \geqslant \sum_{n=1}^{N}\int_{E_n} f(x)g(x)dx$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{N}\int_{E_n}\frac{a_n}{na_n\eta_n}dx = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n\eta_n}{na_n\eta_n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

可见 g 在 E 上 (L) 可积而 fg 在 E 上并不 (L) 可积.

12. $[0,1]$ **上的一个有界可测函数** f**, 使对任何** (R) **可积函数** g**, 都有** $\int_{[0,1]}|f(x)-g(x)|dx>0$.

设 $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 为第八章例 17 中的有界可测函数, 则对 $[0,1]$ 上的任一连续函数 $\varphi(x)$, 恒有

$$m\{x: f(x)\neq\varphi(x)\}>0.$$

现设 g 为 $[0,1]$ 上的任一 (R) 可积函数, 则 g 在 $[0,1]$ 上几乎处处连续, 从而也有

$$m\{x: f(x)\neq g(x)\}>0.$$

于是应有 $\varepsilon>0$ 存在, 使得

$$mE(\varepsilon)=m\{x:|f(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon\}=\delta>0.$$

因此

$$\int_{[0,1]}|f(x)-g(x)|dx=\int_{\{x:f(x)\neq g(x)\}}|f(x)-g(x)|dx$$
$$\geqslant\int_{E(\varepsilon)}|f(x)-g(x)|dx\geqslant\varepsilon mE(\varepsilon)=\varepsilon\delta>0.$$

13. 在每个子集上都 (L) **可积, 但在并集上并不** (L) **可积的函数.**

容易证明, 若 f 是 E_n $(n=1,2,\cdots)$ 上的可测函数, 则 f 也是 $\cup_{n=1}^{\infty}E_n$ 上的可测函数. 然而, 对于 (L) 积分而言, 相应的命题并不成立. 例如, 令

$$E_n=(1/(2n+1),1/(2n-1)],\quad n=1,2,\cdots,$$

则各个 E_n 两两不相交, 且 $\cup_{n=1}^{\infty}E_n=(0,1]$. 又令

$$f(x)=\begin{cases} n, & 2n/(4n^2-1)<x\leqslant 1/(2n-1),\\ -n, & 1(2n+1)<x\leqslant 2n/(4n^2-1),\ n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

则 f 在每个 E_n 上都是有界可测的函数, 从而 (L) 可积, 其积分值为

$$\int_{E_n} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2n}{4n^2-1}} (-n)dx + \int_{\frac{2n}{4n^2-1}}^{\frac{1}{2n-1}} ndx$$

$$= -n\left(\frac{2n}{4n^2-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2n}{4n^2-1}\right) = 0.$$

但是,

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} ndx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

可见, $|f|$ 在 $(0,1]$ 上并不 (L) 可积, 从而 f 在 $(0,1]$ 上也不 (L) 可积.

注 容易证明, 若 f 在有限个集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 上均 (L) 可积, 则 f 在 $E = \cup_{k=1}^n E_k$ 上也 (L) 可积. 上述反例说明了不能把这一命题推广到无穷多个集合的并集上去.

14. R^1 **上的一个非负** (L) **可测函数** f**, 使对任何区间** (a,b) $(a<b)$ **及** $r \in R^1$**, 恒有** $m\{(a,b) \cap \{x : f(x) \geqslant r\}\} > 0$**, 但** $\int_{R^1} f(x)dx \neq +\infty$.

下面的例子是由 Henkel [90] 作出的.

设 $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为 R^1 中的全体有理数, 在 R^1 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-r_n)^{-\frac{1}{2}}, & x \in (r_n, r_n+1), \\ 0, & x \overline{\in} (r_n, r_n+1). \end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n},$$

则 f 是 R^1 上的非负 (L) 可测函数. 易见, 对任何区间 (a,b) 及 $r>0$, 存在有理数 $q \in (a,b)$ 及某个实数 c, 使得 $(q,c) \subset (q, q+1)$, 而且在 (q,c) 上 $f(x) \geqslant r$. 于是得到

$$m\{(a,b) \cap \{x : f(x) \geqslant r\}\} > 0.$$

但是, 经过计算可得

$$\int_{R^1} f(x)dx = 2.$$

15*. **函数** f**, 处处适合** $0 \leqslant f(x) < +\infty$**, 但在每个非空开区间** (a,b) **上,** $\int_a^b f(x)dx = +\infty$.

设 A 是 $[0,1]$ 中测度为 $1/2$ 的 Cantor 集. 对于任意开区间 $I=(a,b)$, 令

$$Z_I = \{a + (b-a)x : x \in A \cap (0,1)\},$$

则 $mZ_I = (b-a)mA = |I|/2$ (参看 [82], pp.67—69), 式中 $|I|$ 表示区间 I 的长度. 再令

$$g_I(x)\frac{1}{|I|^2}\varphi_{z_I}(x),$$

其中 φ_{z_I} 为集 Z_I 特征函数. 然后重复第七章例 39 的程序来构造函数 f. 因为每个集 Z_I 的测度为 $|I|/2$, 所以函数 g_I 在 I 上的积分就等于 $1/(2|I|)$. 既然每个形如 (a,b) 的非空开区间含有任意小长度的子区间 I, 那么积分 $\int_a^b f(x)dx$ 将任意大, 由于它是一个常数, 所以等于 $+\infty$.

16. 任给 $f \in L[a,b]$, 可构造集 $A \subset [a,b]$, 使 $mA = b-a$, 且对任一 $r \in R^1$ 和任一 $x \in A$, 都有 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt = |f(x)-r|$.

设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 R^1 的稠密子集, 令

$$g_n(x) = |f(x) - r_n|.$$

易见, 对每一 $n, g_n \in L[a,b]$. 再令

$$G_n(x) = C + \int_a^x g_n(t)dt,$$

其中 C 为一常数. 于是, 在 $[a,b]$ 上几乎处处有

$$G_n'(x) = g_n(x).$$

由此可知, 存在子集 $A_n \subset [a,b]$, 使 $mA_n = b-a$, 且当 $x \in A_n$ 时, 有

$$g_n(x) = G_n'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G_n(x+h)-G_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} g_n(t)dt.$$

令 $A = \cap_{n=1}^{\infty}A_n$, 则

$$m([a,b]\setminus A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}([a,b]\setminus A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m([a,b]\setminus A_n) = 0,$$

故 $mA = b-a$.

任给 $\varepsilon > 0$ 及 $r \in R^1$, 选取如此的 $n = n(\varepsilon, r)$, 使

$$|r - r_n| < \varepsilon/3.$$

于是, 对任意 $x \in [a,b]$, 有

$$||f(x)-r| - |f(x)-r_n|| < \varepsilon/3.$$

由此得到

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt - |f(x)-r|\right| < 2\varepsilon/3 + \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(g_n(t)-g_n(x))dt\right|.$$

如果 $x \in A$, 那么 $x \in A_n$, 从而由等式

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} g_n(t)dt = g_n(x) \quad (\forall x \in A_n)$$

可知存在 $h_\varepsilon > 0$, 使当 $|h| < h_\varepsilon$ 时, 就有

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(g_n(t)-g_n(x))dt\right| < \varepsilon/3,$$

这样就得到了所需的结论.

17*. $[0,+\infty)$ 上的一个非负的上半连续函数 f, 使 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, 而对每一 $h>0$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) < +\infty$.

下面的构造法属于 Haclane [80].

我们首先用归谬法构造 $(n, n+1)$ $(n=1,2,\cdots)$ 中具有正测度的闭疏集 E_n, 它们适合下列条件: 对于某个 $h>0$ 及正整数 r,s, 当 $rh \in \cup_{k=1}^{n} E_k, sh \in E_{n+1}$ 时, 就有 $h < 1/(n+1)$. 设 E_1 是区间 $(1,2)$ 中任一具有正测度的闭疏集, 并设具有上述性质的闭疏集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 已经作出. 令

$$F_n = \bigcup_{r,s}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \frac{s}{r} E_k\right),$$

这里, $aE_n = \{x : x/a \in E_n\}$, $\cup_{r,s}$ 是对一切有理数 s/r 求和, 且具有 $r \leqslant (n+1)^2$. F_n 显然是疏集. 因此, $(n+1, n+2)$ 必定包含一个与 F_n 不相交的开区间. 在这个开区间中任取一个闭疏集作为 E_{n+1}, 则 E_{n+1} 具有所需的性质. 事实上, 如果 $rh \in \cup_{k=1}^{n} E_k$, $h \geqslant 1/(n+1)$, 则

$$n+1 \geqslant rh \geqslant r/(n+1),$$

因此, $r \leqslant (n+1)^2$. 于是便有

$$sh \in \bigcup_{k=1}^{n} (s/r) E_k \subset F_n,$$

可见 $sh \overline{\in} E_{n+1}$. 明所欲证.

其次, 我们在 $[0,+\infty)$ 上如下定义函数 f :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n, \\ 1/mE_n, & x \in E_n,\ n=1,2,\cdots, \end{cases}$$

则 f 是非负的上半连续函数, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \frac{1}{mE_n} dx = +\infty.$$

另一方面, $\sum_{n=1}^{\infty} f(nh)$ 中只有有限项不为零, 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) < +\infty.$$

18. R^1 上的一个一致有界的 (L) 可测函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何区间 $[a,b]$, $\{f_n\}$ 中都不存在在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛的子列.

下面的例子是由 Fine [74] 作出的.

设 f 是 R^1 上不对等于常值函数且具有周期为 1 的有界可测函数. 例如, 函数

$$f(x) = 4[x] - 2[2x] + 1$$

就具有上述性质, 其中 $[x]$ 代表括号函数.

令 $f_n(x) = f(nx)$, 则 $\{f_n\}$ 是 R^1 上的一个一致有界的 (L) 可测函数序列. 兹证对任何非空区间 $[a,b]$, $\{f_n\}$ 中不存在在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛的子列. 为此, 任

取非空区间 $[\alpha, \beta]$, 由 f 的周期性得到

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(nx)dx &= \frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{n\beta} f(x)dx \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{j=[n\alpha]}^{[n\beta]}\int_j^{j+1} f(x)dx + \int_{[n\beta]}^{n\beta} f(x)dx - \int_{[n\alpha]}^{n\alpha} f(x)dx\right\} \\
&= \frac{1}{n}(1+[n\beta]-[n\alpha])\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{n}\left(\int_{[n\beta]}^{n\beta} f(x)dx - \int_{[n\alpha]}^{n\alpha} f(x)dx\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

显然,

$$\left|\frac{1}{n}\left(\int_{[n\beta]}^{n\beta} f(x)dx - \int_{[n\alpha]}^{n\alpha} f(x)dx\right)\right| \leqslant \frac{2}{n}\|f\|_{L^\infty(R^1)},$$

因而得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\int_{[n\beta]}^{n\beta} f(x)dx - \int_{[n\alpha]}^{n\alpha} f(x)dx\right) = 0.$$

又因为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}([n\beta]-[n\alpha]) &= \frac{1}{n}\{n\beta - n\alpha + ([n\beta]-n\beta) + (n\alpha - [n\alpha])\} \\
&= \beta - \alpha + \frac{[n\beta]-n\beta}{n} + \frac{n\alpha - [n\alpha]}{n},
\end{aligned}$$

故由 (1) 式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx = (\beta-\alpha)\int_0^1 f(x)dx. \tag{2}$$

倘若存在某个区间 $[a, b]$ 及 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于某个函数 g, 则 g 必是 $[a, b]$ 上的有界的 (L) 可测函数. 任取 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 并令

$$M = \int_0^1 f(x)dx,$$

据 Lebesgue 有界收敛定理, 得到

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f(n_k x)dx = (\beta-\alpha)M.$$

因而

$$\int_\alpha^\beta (g(x)-M)dx = 0.$$

由于 $[\alpha, \beta]$ 是 $[a, b]$ 的任意子区间, 所以在 $[a, b]$ 上几乎处处成立着 $g(x) = M$. 于是, 由 (2) 式得到

$$(b-a)\int_0^1 |f(x)-M|dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b |f_{n_k(x)} - M|dx = 0,$$

从而在 $[0, 1]$ 上几乎处处成立着 $f(x) = M$. 此为矛盾.

19. Lebesgue 有界收敛定理中 $mE < +\infty$ 的条件不可去掉.

设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & 0 \leqslant x < n, \\ 0, & n \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 是 $[0, +\infty)$ 上可测 (且可积) 的函数序列, 又 $|f_n(x)| < 1, n = 1, 2, \cdots, \{f_n\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于 $f \equiv 0$. 因此, 除了 $mE < +\infty$ 外, $\{f_n\}$ 满足 Lebesgue 有界收敛定理的其他各项条件. 然而,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1, \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

可见

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

更为极端的例子是: 设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & |x| \leqslant n^2, \\ 0, & |x| > n^2, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上一致有界的可积函数序列, 并且一致收敛于 $f \equiv 0$. 但

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 2n = +\infty.$$

20. Lebesgue 有界收敛定理中函数序列一致有界的条件不可去掉.

在区间 $[0, 1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

易见, $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛于 $f \equiv 0$. 但是

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1, \quad \int_0^1 f(x)dx = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

21. Lebesgue 控制收敛定理中控制函数的可积性的条件不可去掉.

作函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & n < x < +\infty, \ n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

显然, 控制 $\{f_n(x)\}$ 的函数 $g(x)$ 必须在 $[0,+\infty)$ 上几乎处处有 $g(x)\geqslant 1$. 此时, 控制函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不是 (L) 可积的. $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上处处收敛于 $f(x)\equiv 1$, 但 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上并不 (L) 可积.

22. Vitali 定理中 $mE<+\infty$ 的条件不可去掉.

在 $E=[0,+\infty)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & 0\leqslant x<n,\\ 0, & n\leqslant x<+\infty,\end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 是 E 上的可积函数序列. 又对任意 $\varepsilon>0$, 取正数 δ 使 $\delta<\varepsilon$, 则当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时, 就有

$$\left|\int_A f_n(x)dx\right|\leqslant\int_A dx=mA<\delta<\varepsilon,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 E 上具有等度的绝对连续积分. 最后, 令 $f\equiv 0$, 对任意正数 σ, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时就有 $1/n<\sigma$. 因而当 $n>N$ 时, 就有

$$E[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=\varnothing,$$

即 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f. 于是, Vitali 定理中除条件 $mE<+\infty$ 不被满足外, 其余的条件全都满足. 然而

$$\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=1,\quad \int_0^{+\infty}f(x)dx=0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\neq\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

23. 使 Fatou 引理中等号不成立的函数序列.

取 $E=[0,1]$, $f_n(x)=nxe^{-nx^2}, n=1,2,\cdots$, 则 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数序列, 且

$$\int_E f_n(x)dx=\int_E nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n},$$

因而

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\frac{1}{2}.$$

另一方面, 对任意 $x\in E$, 都有

$$\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

因此

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)dx=0.$$

可见

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)dx<\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

24. 一个变号的收敛可测函数序列, 使 Fatou 引理的结论不成立.

取 $E=(0,1)$, 并在 E 上定义函数序列如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & 1/(n+1)<x<1,\\ -n, & 0<x\leqslant 1/(n+1).\end{cases}$$

又令 $f(x)\equiv 1$, 则对每一 $x\in E$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

所以

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=1.$$

另一方面, 我们有

$$\int_E f_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n+1}} -ndx+\int_{\frac{1}{n+1}}^1 dx=-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}=0,$$

因此

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx>\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=0.$$

注 这个例子说明了对于变号的函数序列, Fatou 引理的结论不再成立.

25. Levi 定理中函数序列非负性的条件不可去掉.

在区间 $[-1,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{n}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

然而

$$\int_{[-1,1]}\{f_n\}^+dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right)dx=+\infty,$$

$$\int_{[-1,1]}\{f_n\}^-dx=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right)dx=+\infty,$$

故 $\int_{[-1,1]} f_n(x)dx$ 不存在. 同样, $\int_{[-1,1]} f(x)dx$ 也不存在.

26. 两个平方 (L) 可积的函数, 它们的和不是平方 (L) 可积的.

设 E_1 为 $[0,1]$ 中的一个不可测子集, E_2 为 $[2,3]$ 中的一个不可测子集. 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cup E_2\\ -1, & x\in[2,3]\setminus E_2,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[2,3]\cup E_1,\\ -1, & x\in[0,1]\setminus E_1,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}$$

则

$$f^2(x)=g^2(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cup[2,3],\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}$$

所以 f^2 与 g^2 在 R^1 上都是 (L) 可积的. 另一方面,

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2, & x\in E_1\cup E_2,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}$$

$$[f(x)+g(x)]^2=\begin{cases}4, & x\in E_1\cup E_2,\\ 0, & \text{其他点},\end{cases}$$

而 $E_1\bigcup E_2$ 是不可测集, 故 $(f+g)^2$ 在 R^1 上并不 (L) 可积.

27. 一个非负函数 f, 使 $f\in L^2[1,+\infty)$, 但 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=+\infty$.

设 $\{a_n\}$ 是适合等式

$$\frac{1}{n\ln n}=a_n\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

的数列, 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_{[n,n+1]}(x),$$

其中 $\varphi_{[n,n+1]}$ 代表区间 $[n,n+1]$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}f^2(x)dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}a_n^2dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)^2\frac{1}{n\ln^2 n}.\end{aligned}$$

因为上式右端的级数收敛, 所以 $f\in L^2[1,+\infty)$.

另一方面

$$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varphi_{[i,i+1]}(x)dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}a_ndx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

因为上式右端的级数发散, 所以 $f(x)/\sqrt{x}\in L[1,+\infty)$.

28. 不属于任何 $L^p(0,1)$ $(p>0)$ 的非负可测函数.

设 $f(x)=e^{1/x}$ $(0<x<1)$, 则 f 是区间 $(0,1)$ 上的非负可测函数. 然而容易看出, 对任何 $p>0, f\in L^p(0,1)$.

29. 属于 $L^{p-\delta}(0,a)$ 而不属于 $L^p(0,a)$ 的非负可测函数, 其中 $0<\delta<p$.

设 $f(x)=x^{-1/p}$, 则 f 是 $(0,a)$ 上的非负可测函数. 因为对任意 $0<\delta<p$, 都有

$$\int_0^a|f(x)|^{p-\delta}dx=\int_0^a x^{\frac{\delta}{p}-1}dx=\frac{p}{\delta}a^{\frac{\delta}{p}}<+\infty,$$

故对任何 $0<\delta<p, f\in L^{p-\delta}(0,a)$. 但是

$$\int_0^a|f(x)|^pdx=\int_0^a\frac{1}{x}dx=+\infty,$$

因此 $f\in L^p(0,a)$.

30. 属于 $L^2(0,+\infty)$ 而不属于任何 $L^p(0,+\infty)$ $(p>0,p\neq 2)$ 的非负可测函数.

设 $f(x)=x^{-1/2}(1+|\ln x|)^{-1}$, 则 f 是 $(0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 从而也是非负可测函数. 因为

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_0^{+\infty}x^{-1}(1+|\ln x|)^{-2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{x(1-\ln x)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}=2,$$

所以 $f\in L^2(0,+\infty)$.

为证 $f\in L^p(0,+\infty)$ $(p>0,p\neq 2)$, 只要注意, 对于非负连续函数而言, (L) 可积性与广义 (R) 可积性是等价的. 而

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^pdx=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{p/2}(1+|\ln x|)^p}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{x^{p/2}(1-\ln x)^p}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{p/2}(1+\ln x)^p}$$
$$=I_1+I_2,$$

据广义 (R) 积分的 Cauchy 判别法 (参看 [7], p.676), 积分 I_1 收敛而 I_2 发散, 从而 $\int_0^{+\infty}|f(x)|^pdx$ 发散, 即 $f\in L^p(0,+\infty)$.

注 容易证明, 若 $mE<+\infty$ 且 $p'<p$, 则 $L^p(E)\subset L^{p'}(E)$. 例 29 说明了这

个包含关系是严格的. 例 30 则说明了当 $mE=+\infty$ 时, 若 $p\neq p'$, 那么 $L^p(E)$ 与 $L^{p'}(E)$ 可以互不包含.

31. 函数 f 和 g, 使 $\{\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\}^{1/p} > \{\int_E |f(x)|^p dx\}^{1/p} + \{\int_E |g(x)|^p dx\}^{1/p}$, 这里, $0<p<1$.

设 E 为具有正测度的点集, A 与 B 为 E 的两个不相交的子集, 且 $0<mA<+\infty$, $0<mB<+\infty$. 令

$$f(x)=(1/(mA)^{1/p})\varphi_A(x),\quad g(x)=\varphi_B(x),$$

其中 φ_A 与 φ_B 分别为 A 与 B 的特征函数, 则

$$\left\{\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right\}^{1/p}=\left\{\int_A \frac{1}{mA}dx+\int_B dx\right\}^{1/p}=(1+mB)^{1/p},$$

$$\left\{\int_E |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}=1,\quad \left\{\int_E |g(x)|^p dx\right\}^{1/p}=(mB)^{1/p}.$$

由于 $0<p<1$, 故 $1/p>1$, 从而

$$(1+mB)^{1/p}>1+(mB)^{1/p},$$

即

$$\left\{\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right\}^{1/p}>\left\{\int_E |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_E |g(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

32. 连续单调函数 g 和连续函数 f, 适合 $\int_0^1 f(x)dg(x)\neq\int_0^1 f(x)g'(x)dx$.

在区间 $[0,1]$ 上, 设 $f\equiv 1$, 又设 g 为第七章例 23 中的 Cantor 函数 θ. 于是上式左端的 Riemann-Stieltjes 积分或 Lebesgue-Stieltjes 积分等于 $\theta(1)-\theta(0)=1$ (参看 [27], [14] 或 [18]), 而在右端, 因为被积函数几乎处处等于零, 所以其 Lebesgue 积分等于零.

33. 函数 f 与 g, 使 f 关于 g 是 Lebesgue-Stieltjes 可积而不是 Riemann-Stieltjes 可积.

设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 1, & x\in(0,1],\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0),\\ 1+x, & x\in[0,1].\end{cases}$$

那么可以求出 f 关于 g 的 Lebesgue-Stieltjes 积分为 1 (参看 [14], p.50). 但是, 由于 $x=0$ 是函数 f 与 g 的公共间断点, 因而 f 关于 g 的 Riemann-Stieltjes 积分不存在 (参看 [98], 中译本 pp.186—187).

34. 使 $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p(E)}=\|f\|_{L^\infty(E)}$ 不成立的函数 f

容易证明, 若 $mE<+\infty$, 则有

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p(E)}=\|f\|_{L^\infty(E)}.$$

应当注意, 在这个命题中条件 $mE < +\infty$ 是不能去掉的. 例如, 令

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{n}\right],$$

在 R^1 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R^1 \setminus A, \end{cases}$$

则当 $p < +\infty$ 时, 有

$$\|f\|_{L^p(R^1)} = \left\{\int_A dx\right\}^{1/p} = (mA)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)^{1/p} = +\infty.$$

但 $\|f\|_{L^\infty(R^1)} = 1$, 所以

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p(R^1)} \neq \|f\|_{L^\infty(R^1)}.$$

35. $L^\infty(R^1)$ **中的一个函数** f, **使不存在** R^1 **上的连续函数序列** $\{f_n\}$, **适合** $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^\infty(R^1)} = 0$.

设 (a, b) 是 R^1 中的非空开区间, 在 R^1 上定义函数 f:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b), \\ 0, & x \overline{\in} (a, b), \end{cases}$$

则 $f \in L^\infty(R^1)$. 如果存在 R^1 上的连续函数序列 $\{f_n\}$, 使

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_{L^\infty(R^1)} = 0,$$

那么对正数 ε ($\varepsilon < 1/2$) 而言, 就应该有 R^1 上的连续函数 g, 适合

$$\|f - g\|_{L^\infty(R^1)} \leqslant \varepsilon.$$

由此得到在 R^1 上几乎处处成立着 $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. 于是, 对任意正数 δ, 存在点 $x \in (a, a + \delta)$, $y \in (a - \delta, a)$, 使得

$$|1 - g(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |g(y)| \leqslant \varepsilon.$$

由此得到

$$\limsup_{x \to a^+} g(x) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \liminf_{x \to a^-} g(x) \leqslant \varepsilon.$$

这与 g 的连续性发生矛盾.

注 上述反例说明了 R^1 上的全体连续函数所成之集在 $L^\infty(R^1)$ 中并不稠密.

36. R^1 **上的一个非负** (L) **可积函数, 使对任何非空区间** $[a, b]$, **它在** $[a, b]$ **上都不是本性有界的.**

设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 R^1 中的全体有理数, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} (x - r_n)^{-1/2}, & x \in (r_n, r_n + 1), \\ 0, & x \overline{\in} (r_n, r_n + 1), \end{cases} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n},$$

则 f 是 R^1 上的非负可测函数, 且 $f \in L(R^1)$.

现证对任何非空区间 $[a,b]$, f 在 $[a,b]$ 上都不是本性有界的, 即

$$\|f\|_{L^\infty[a,b]} = \inf_{\substack{E\subset[a,b]\\ mE=0}} \left\{ \sup_{x\in[a,b]\setminus E} f(x) \right\} = +\infty.$$

事实上, 假若不然, 那么存在某个测度为零的集 $E\subset[a,b]$, 使得 f 在 $[a,b]\setminus E$ 上是有界的, 即存在常数 M 使对任何 $x\in[a,b]\setminus E$, 都有

$$f(x)\leqslant M.$$

于是

$$m\{[a,b]\cap\{x: f(x)>M\}\}=0.$$

另一方面, 由例 14 可知,

$$m\{[a,b]\cap\{x: f(x)>M\}\}>0.$$

此为矛盾, 故 f 在 $[a,b]$ 上不是本性有界的.

37. 一个 (L) 可积函数, 它的某个近似连续点不是 Lebesgue 点.

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, $x_0\in[a,b]$. 假如存在可测集 $E\subset[a,b]$, 使得 x_0 是 E 之一全密点, 即

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{m\{E\cap[x_0-h,x_0+h]\}}{2h}=1$$

(如果 $x_0=a$, 则只要 $\lim_{h\to0^+} m\{E\cap[a,a+h]\}/h=1$. 对于 $x_0=b$, 可仿此定义), 且 f 沿着 E 在 x_0 是连续的, 则称 f 在 x_0 为近似连续.

由定义可知, f 的连续点是近似连续点.

假如

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0,$$

则称点 x 为 f 的 Lebesgue 点.

容易证明, (L) 可积函数在它的每一个 Lebesgue 点是近似连续的, 其逆不真. 反例如下: 设

$$f(x)=\begin{cases} 2^n, & x\in\left[\dfrac{1}{2^n},\dfrac{1}{2^n}+d_n\right), \\ 0, & x=0 \text{ 或 } x\in\left[\dfrac{1}{2^n}+d_n,\dfrac{1}{2^{n-1}}\right), \end{cases} \qquad n=1,2,\cdots,$$

这里, $d_n=1/2^{2n}$, 易见, f 是定义在 $[0,1)$ 上的 (L) 可积函数. 再将 f 按偶函数延拓到 $(-1,0]$ 而得到定义在 $(-1,1)$ 上的 (L) 可积函数.

我们先证 $x=0$ 是 f 的右近似连续点. 为此, 令

$$E=\bigcup_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{2^n}+d_n,\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

易见, 当 $x\in E$ 时, $f(x)=0$, 而 $f(0)=0$, 故

$$\lim_{\substack{x\in E\\ x\to0}} f(x)=f(0).$$

剩下只要证明 $\lim_{h\to 0^+} m\{E\cap[0,h]\}/h=1$ 即可. 设 $h\in(1/2^{n_0+1},1/2^{n_0}]$, 并令 $E(h)=[0,h]\cap E$, 则

$$E(h)=\bigcup_{i=n_0+2}^{\infty}\left[\frac{1}{2^i}+d_i,\frac{1}{2^{i-1}}\right)\bigcup\left([0,h]\bigcap\left[\frac{1}{2^{n_0+1}}+d_{n_0+1},\frac{1}{2^{n_0}}\right)\right)$$
$$=[0,h]\setminus\left\{\left(\bigcup_{i=n_0+2}^{\infty}\left[\frac{1}{2^i},\frac{1}{2^i}+d_i\right)\right)\bigcup\left([0,h]\bigcap\left[\frac{1}{2^{n_0+1}},\frac{1}{2^{n_0+1}}+d_{n_0+1}\right)\right)\right\}.$$

由此可知,

$$mE(h)\geqslant h-\sum_{i=n_0+2}^{\infty}d_i-d_{n_0+1}=h-\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}$$
$$\geqslant h-h\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=h\left(1-\frac{1}{2^{n_0}}\right).$$

由于对一切 $1/2^{n_0+1}<h\leqslant 1/2^{n_0}$ $(n_0=1,2,\cdots)$, 上述不等式都成立, 所以当 $h\to 0+$ 时, $n_0\to+\infty$, 于是

$$\lim_{h\to 0+}\frac{mE(h)}{h}\geqslant 1-\lim_{n_0\to+\infty}\frac{1}{2^{n_0}}=1.$$

又因 $mE(h)/h\leqslant 1$, 故

$$\lim_{h\to 0+}\frac{mE(h)}{h}\leqslant 1.$$

这就证明了 $x=0$ 是函数 f 的右近似连续点.

同理可证 $x=0$ 是 f 的左近似连续点. 因而 $x=0$ 是 f 的近似连续点.

其次证明 $x=0$ 不是 f 的 Lebesgue 点. 为此, 取 $h_n=1/2^n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n}|f(x)-f(0)|dx\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}2^i m\left[\frac{1}{2^i},\frac{1}{2^i}+d_i\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{1}\cdot\frac{1}{2^n}=1>0,$$

即 $x=0$ 不是 f 的 Lebesgue 点.

注 容易证明, 对于有界可测函数而言, Lebesgue 点与近似连续点相同. 上述反例说明了在这个陈述中, 函数为有界的条件不可去掉.

38. 存在函数 f, 使 $f(x_0)$ 是其不定积分在 x_0 的导数, 但 f 在点 x_0 并不近似连续.

设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n(n+1)}\right),\\ -1, & x\in\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n(n+1)},\dfrac{1}{n}\right),\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots,$$

则 f 是 $[0,1)$ 上的有界可测函数, 从而 $f\in L[0,1)$. 令

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

首先计算 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处的右导数.

$$\varphi'(0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{\varphi(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^h f(x)dx}{h}.$$

设 $0<h<1$, 则必有正整数 n_0 存在, 使得 $1/(n_0+1)<h\leqslant 1/n_0$, 于是

$$\int_0^h f(x)dx=\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{n_0+1}}^{h} f(x)dx.$$

由 f 的定义可知,

$$\int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} f(x)dx=0\quad (i=1,2,\cdots),$$

因而

$$\left|\int_0^h f(x)dx\right|=\left|\int_{\frac{1}{n_0+1}}^{h} f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}=\frac{1}{n_0(n_0+1)}.$$

当 $h\to 0+$ 时 $n_0\to+\infty$, 于是得到

$$0\leqslant\lim_{h\to 0+}|\varphi(h)|/h\leqslant\lim_{n_0\to+\infty}(n_0+1)/n_0(n_0+1)=0,$$

即 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的右导数存在且等于 $f(0)$.

当把 f 按偶函数延拓到 $(-1,0]$ 时, 就得到 $(-1,1)$ 中定义的函数. 用上述同样的方法可知 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的左导数也存在, 且 $\varphi'(0-)=f(0)$. 于是 $\varphi'(0)=f(0)=0$.

由于对任意 $\delta>0$, 当 $x\in(-\delta,0)$ 或 $x\in(0,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|=1$, 从而对 $x=0$ 的任一全密点集不可能有点列 $\{x_n\}$, 当 $x_n\to 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0=f(0).$$

因此, $x=0$ 一定不是 f 的近似连续点.

注 若 x 是 f 的 Lebesgue 点, 则 f 的 (L) 不定积分

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在点 x 具有导数 $f(x)$ (参看 [27], 中译本 pp.314—315). 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

第十章

不同意义收敛的函数序列

0. 引言.

设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的 p $(1 \leqslant p < +\infty)$ 次幂 Lebesgue 可积函数序列, 这时 $\{f_n\}$ 的收敛意义可以按多种意义解释. 在这一章里, 我们将考虑其中较常见的几种收敛意义, 并指出它们之间的蕴涵关系, 当没有蕴涵关系时就给出反例. 我们要考虑的收敛意义是:

(1) **一致收敛:**

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 关于 $x \in E$ 一致地成立.

(2) **近一致收敛:**

任给 $\delta > 0$, 存在 E 的可测子集 E_δ, 使在 E_δ 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 而 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$.

(3) **几乎处处收敛**[①]:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 对于几乎所有的 $x \in E$ 成立.

(4) **测度收敛:**

任给 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} m\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0$.

(5) **平均收敛:**

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

[①] 最相近的收敛型是处处收敛, 它与 (3) 的关系无足轻重.

(6) **弱收敛:**

当 $1 < p < +\infty$ 时, 对每个 $g \in L^q(E)$, $1/p + 1/q = 1$, 有

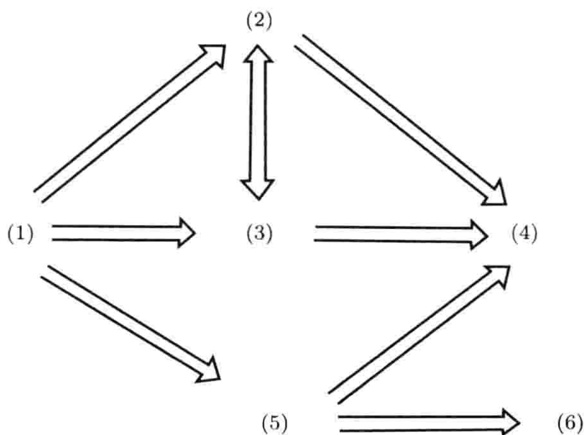
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)dx = \int_E f(x)g(x)dx.$$

当 $p = 1$ 时, 对每个 $g \in L^\infty(E)$, 有

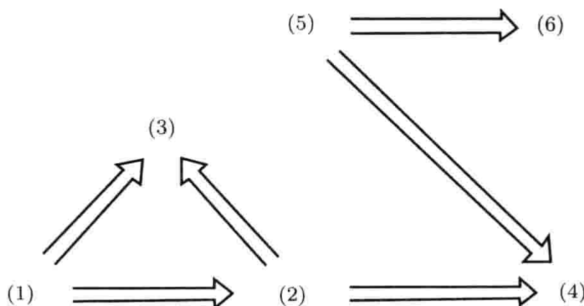
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)dx = \int_E f(x)g(x)dx.$$

关于收敛意义 (1)—(6) 之间的蕴涵关系, 我们就 E 的测度为有限或无穷而分别加以讨论.

若 $mE < +\infty$, 则有



当 $mE = +\infty$ 时, 有



随后的例子将要表明, 凡是上面未曾列出的蕴涵关系, 可能都不行.

1. 几乎处处收敛与测度收敛之间的关系.

当 $mE < +\infty$ 时, 几乎处处收敛蕴涵测度收敛, 其逆不真; 而当 $mE = +\infty$ 时, 几乎处处收敛不蕴涵测度收敛.

第一例 测度收敛而无处收敛的函数序列.

对于每个正整数 k, 在区间 $[0,1)$ 上定义 k 个函数:

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right),\\ 0, & x\overline{\in}\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right),\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,k.$$

将这些函数排成一列:

$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x),\quad \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),\quad \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),\quad \varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),\quad \cdots,$

则函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $E=[0,1)$ 上依测度收敛于 $f(x)\equiv 0$. 因为如果 $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$, 则对于任意的不大于 1 的正数 σ, 有

$$E[x:|\varphi_n(x)|\geqslant\sigma]=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),$$

注意, 当 $n\to\infty$ 时也有 $k\to\infty$, 因而

$$\lim_{n\to\infty} mE[x:|\varphi_n(x)|\geqslant\sigma]=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$

即, $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上依测度收敛于 0.

但是, 在 $[0,1)$ 中任意一点 x_0, 关系式

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$$

并不成立, 因为当 $x_0\in[0,1)$ 时, 固定 k, 必有如下的 i:

$$x_0\in\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right),$$

从而 $f_i^{(k)}(x_0)=1$. 换言之, 我们沿数列

$$\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\varphi_3(x_0),\cdots$$

看下去, 不论怎么样的远, 总有等于 1 的数. 所以 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$ 不能成立.

第二例 处处收敛而不测度收敛的函数序列.

命

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[n,n+1],\\ 0, & x\overline{\in}[n,n+1],\end{cases}$$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 $E=(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛于 $f(x)\equiv 0$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} mE\left[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{2}\right]=\lim_{n\to\infty} m[n,n+1]=1,$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上并不依测度收敛于 $f(x)$.

注 从上两例看出两种收敛区别很大, 它们的区别正是在于: 假如固定任一个 $\varepsilon>0$, 那么 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f 的特点是 (i) 对 E 中每点 x_0, 总有一个指标 $n(x_0)$, 对于从 $n(x_0)$ 以后的一切 n, $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$, 即 $x_0\in\cap_{n=n(x_0)}^{\infty}E[x:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon]$; (ii) 对于每个指标 n 来说, 使得 $|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ 的点 x 全体却可能有较大的测度. 而依测度收敛的特点是完全相反, 它的特点是 (i) $E[x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon]$ 的测度一定要随 $n\to\infty$ 而趋向于零; (ii) 而对每个 x_0 来说, 却

未必存在某个指标 $n(x_0)$, 使得

$$x_0 \in \bigcap_{i=n(x_0)}^{\infty} E[x : |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon],$$

甚至可能对每个指标 $n, \cap_{i=n}^{\infty} E[x : |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon]$ 始终是空集.

2. 近一致收敛与几乎处处收敛之间的关系.

当 $mE < +\infty$ 时, E 上的可测函数序列其近一致收敛性与几乎处处收敛性彼此等价; 而当 $mE = +\infty$ 时, 近一致收敛性蕴涵几乎处处收敛性, 其逆不真, 例如, 设 $E = [0, +\infty)$, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[n, n + \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in E \setminus \left[n, n + \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

易见, $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 $f \equiv 0$. 但是, 它在 E 上并不近一致收敛于 0. 如若不然, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $e \subset E$, 使 $me < \varepsilon$, 而 $\{f_n\}$ 在 $E \setminus e$ 上一致收敛于 0, 那么就有正整数 N 存在, 当 $n \geqslant N$ 时, 对一切 $x \in E \setminus e$, 都有

$$|f_n(x)| < 1.$$

令 $A_n = [n, n + \frac{1}{n}]$, 在 A_n 上, 恒有 $f_n(x) = 1$. 由此可见

$$(E \setminus e) \cap \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \right) = \varnothing.$$

于是得到 $\cup_{k=N}^{\infty} A_k \subset e$, 因而

$$me \geqslant \sum_{k=N}^{\infty} mA_k = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

这与 $me < \varepsilon$ 发生矛盾.

3. 一致收敛与平均收敛之间的关系.

若 $mE < +\infty, \{f_n\} \subset L^p(E)$ $(p \geqslant 1)$ 且 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 亦必平均收敛于 f. 应当注意, 当 $mE = +\infty$ 时, 一致收敛并不蕴涵平均收敛, 甚至还不蕴涵弱收敛. 又, 即使 $mE < +\infty$, 平均收敛不蕴涵一致收敛, 甚至一个平均收敛的函数序列可以是无处收敛的.

第一例 一个在可测集 E 上一致收敛的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p \geqslant 1, \{f_n\} \subset L^p(E)$, 但 $\{f_n\}$ 并不弱收敛.

在 $E = (-\infty, +\infty)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi_{[0, e^n]}(x),$$

其中 $\varphi_{[0,e^n]}$ 是区间 $[0, e^n]$ 的特征函数. 因为

$$|f_n(x)| \leqslant 1/n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 $f\equiv 0$. 又对任何 $p\geqslant 1$, 都有 $f_n\in L^p(E)$. 令

$$g(x)=\begin{cases}1/x, & x\geqslant 1,\\ 0, & x<1,\end{cases}$$

则 g 是 E 上的有界可测函数, 且 $g\in L^q(E)$, 其中当 $p>1$ 时, $1/p+1/q=1$, 而当 $p=1$ 时, $q=+\infty$. 因为

$$\int_E f_n(x)g(x)dx=\int_0^{e^n}\frac{1}{x}dx=1,$$

所以 $\{f_n\}$ 并不弱收敛于 f.

第二例 一个函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1, \{f_n\}\subset L^p(E)$ 且 $\{f_n\}$ p 次幂平均收敛, 但它在 E 上无处收敛.

对每一正整数 k, 在 $E=[0,1)$ 上定义 k 个函数

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right),\\ 0, & x\overline{\in}\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right),\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,k.$$

将这些函数排成一列

$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x), \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x), \varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x),\cdots$, 则对任何 p $(1\leqslant p<+\infty)$, 都有 $\{\varphi_n\}\subset L^p(E)$, 且 $\{\varphi_n\}$ p 次幂平均收敛于 $\varphi\equiv 0$. 这是因为如果 $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$, 则当 $n\to\infty$ 时 $k\to\infty$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_{L^p(E)}=\lim_{k\to\infty}\left\{\int_0^1|f_i^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{1/p}=0.$$

但是, 对任何 $x_0\in[0,1)$, 关系式

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$$

并不成立 (参看例 1).

4. 几乎处处收敛与平均收敛互不蕴涵.

第一例 一个函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1, \{f_n\}\subset L^p(E)$ 且 $\{f_n\}$ p 次幂平均收敛, 但它在 E 上无处收敛 (参看例 3 中的第二例).

第二例 一个在可测集 E 上处处收敛的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1, \{f_n\}\subset L^p(E)$, 但 $\{f_n\}$ 并不 p 次幂平均收敛.

在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x<1/n,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } 1/n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

则对每一 $x_0\in[0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=0.$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 $f\equiv 0$. 但是,

$$\|f_n-f\|_{L^p[0,1]}=\left\{\int_0^1|f_n(x)|^pdx\right\}^{1/p}=\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}n^pdx\right\}^{1/p}=(n^{p-1})^{1/p},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p[0,1]}\neq 0$, 即 $\{f_n\}$ 并不 p 次幂平均收敛于 f.

5. 几乎处处收敛与弱收敛互不蕴涵.

第一例 一个在可测集 E 上处处收敛的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1$, $\{f_n\}\subset L^p(E)$, 但 $\{f_n\}$ 并不弱收敛.

在 $(0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=n\varphi_{(0,\frac{1}{n}]}(x),$$

其中 $\varphi_{(0,\frac{1}{n}]}$ 是区间 $\left(0,\frac{1}{n}\right]$ 的特征函数. 易见, 对任何 $p\ (1\leqslant p<+\infty)$, $f_n\in L^p(E)$, 且对每一 $x_0\in E=(0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=0.$$

但是, $\{f_n\}$ 并不弱收敛于 $f\equiv 0$. 事实上, 取 $g\equiv 1$, 则 $g\in L^q(E)$, 这里, 当 $p>1$ 时 $1/p+1/q=1$, 而当 $p=1$ 时 $q=+\infty$, 且有

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n}}ndx=1.$$

因此, $\{f_n\}$ 不弱收敛于 f.

第二例 一个函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1$, $\{f_n\}\subset L^p(E)$ 且弱收敛, 但 $\{f_n\}$ 在 E 上并不几乎处处收敛.

设 $f_n(x)=\cos nx$, $x\in E=[0,2\pi]$, $n=1,2,\cdots$. 易见, $f_n\in L^p(E)$ $(p\geqslant 1)$, 且对任何 $g\in L^q(E)$, $1/p+1/q=1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f_n(x)g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}g(x)\cos nxdx=0.$$

因此, $\{f_n\}$ 弱收敛于 $f\equiv 0$. 但是, $\{f_n\}$ 在 E 上并不几乎处处收敛.

例 3 的第二例中的函数序列也具有所需的性质.

6. 测度收敛与弱收敛互不蕴涵.

第一例 一个在 E 上依测度收敛的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p\geqslant 1$, $\{f_n\}\subset L^p(E)$, 但 $\{f_n\}$ 并不弱收敛.

在 $E=[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=n\varphi_{[0,\frac{1}{n}]}(x),$$

其中 $\varphi_{[0,\frac{1}{n}]}$ 是区间 $[0,\frac{1}{n}]$ 的特征函数. 对任意的 n 及 $p\ (1\leqslant p<+\infty)$, 都有

$$\int_0^1|f_n(x)|^pdx=\int_0^{\frac{1}{n}}n^pdx=n^{p-1},$$

所以 $f_n\in L^p(E)$. 对任意 $\sigma>0$, 有

$$E[x:|f_n(x)|\geqslant\sigma]\subset\left[0,\frac{1}{n}\right],$$

因而 $mE[x : |f_n(x)| \geqslant \sigma] \leqslant \frac{1}{n}$, 即 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f \equiv 0$. 但是, $\{f_n\}$ 并不弱收敛于 f, 因为若取 $g(x) \equiv 1$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} ndx = 1.$$

第二例 可测集 E 上的一个函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p \geqslant 1$, $\{f_n\} \subset L^p(E)$ 且 $\{f_n\}$ 弱收敛, 但 $\{f_n\}$ 并不测度收敛.

令 $E = [0, 2\pi], f_n(x) = 1 + \sin nx$, $f(x) \equiv 1$, 则对每一 $n, f_n \in L^p(E)$, $f \in L^p(E)(p \geqslant 1)$, 且对任何 $g \in L^q(E)$, 这里当 $p > 1$ 时, $1/p + 1/q = 1$, 而当 $p = 1$ 时, $q = +\infty$, 都有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(x)g(x)dx &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin nxdx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,\end{aligned}$$

故 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f. 然而容易看出, $\{f_n\}$ 在 E 上并不依测度收敛于 f.

注 由于平均收敛蕴涵弱收敛, 故例 6 的第一例也说明了测度收敛并不蕴涵平均收敛.

7. 近一致收敛与平均收敛互不蕴涵

第一例 一个在可测集 E 上近一致收敛的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p \geqslant 1, \{f_n\} \subset L^p(E)$, 但 $\{f_n\}$ 并不 p 次幂平均收敛 (参看例 4 中的第二例).

第二例 一个可测集 E 上的函数序列 $\{f_n\}$, 使对任何 $p \geqslant 1, \{f_n\} \subset L^p(E)$ 且 $\{f_n\}$ 平均收敛, 但它在 E 上并不近一致收敛 (参看例 3 中的第二例).

8. 测度收敛而非近一致收敛的函数序列.

容易证明, 近一致收敛的可测函数序列必是依测度收敛的. 但这个命题之逆并不成立. 例如, 设 $E = [0, +\infty)$, 命

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[n, n + \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in E \diagdown \left[n, n + \dfrac{1}{n}\right], \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f \equiv 0$. 但是, 它在 E 上并不近一致收敛于 f (参看例 2).

9. 弱收敛而非平均收敛的函数序列.

容易证明, 平均收敛的函数序列必定是弱收敛的. 然而这个命题之逆并不成立. 例如, 令 $E = [0, 2\pi]$, $f_n(x) = 1 + \sin nx$, $f(x) \equiv 1$, 则 $\{f_n\} \subset L^p(E)$ $(p \geqslant 1)$, 且 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f. 又, $\{f_n\}$ 在 E 上并不测度收敛于 f. 由于当 $mE < +\infty$ 时, 平均收敛蕴涵测度收敛 (参看 [6], p.146). 因此, $\{f_n\}$ 不可能平均收敛于 f.

10. r **次幂平均收敛而不** p $(1 \leqslant r < p)$ **次幂平均收敛的函数序列.**

设 $E=[0,1], \alpha_n = n^{-p}$, 在 E 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1-2\alpha_n, \\ \dfrac{n}{\alpha_n}(x-1+2\alpha_n), & 1-2\alpha_n < x \leqslant 1-\alpha_n, \\ n, & 1-\alpha_n < x \leqslant 1, \end{cases}$$

其中 $n \geqslant 2$, 又令 $f(x) \equiv 0$. 易见, 对任何 $n \geqslant 2$, f_n 是 E 上的连续函数, 因而 $\{f_n\} \subset L^r(E)$, $\{f_n\} \subset L^p(E)$. 因为

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^r(E)} = \|f_n\|_{L^r(E)} &= \left\{ \int_{1-2\alpha_n}^{1-\alpha_n} \frac{n^r}{\alpha_n^r}(x-1+2\alpha_n)^r dx + \int_{1-\alpha_n}^{1} n^r dx \right\}^{1/r} \\ &= \left\{ \frac{1}{r+1} \cdot \frac{n^r}{\alpha_n^r}(x-1+2\alpha_n)^{r+1} \Big|_{1-2\alpha_n}^{1-\alpha_n} + n^r \alpha_n \right\}^{1/r} \\ &= \left(\frac{1}{r+1} n^{-p+r} + n^{-p+r} \right)^{1/r} \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

所以 $\{f_n\}$ r 次幂平均收敛于 f.

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^p(E)} = \|f_n\|_{L^p(E)} &= \left(\frac{1}{p+1} \cdot \frac{n^p}{\alpha_n^p} \alpha_n^{p+1} + n^p \alpha_n \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{p+1} + 1 \right)^{1/p} > 1, \end{aligned}$$

所以 $\{f_n\}$ 并不 p 次幂平均收敛于 f.

注 容易证明, 若 $mE < +\infty$, $1 \leqslant r < p$, 则 $\{f_n\}$ p 次幂平均收敛于 f 蕴涵 $\{f_n\}$ r 次幂平均收敛于 f. 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

11. $[0,1]$ **上的一个函数序列** $\{f_n\}$, **适合** $\|f_n\|_{L^r[0,1]} \leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$, $\{f_n\}$ **在** $[0,1]$ **上处处收敛于** f, **但** $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^r[0,1]} \neq 0$.

下面的例子是由 Wade [170] 作出的.

在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt[r]{n}, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 0, 且

$$\|f_n\|_{L^r[0,1]} \leqslant 1.$$

然而 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^r[0,1]} \neq 0$.

注 我们有如下的命题 [170]: 设 M 为一正常数, $0 < r \leqslant \infty$, 若 $\|f\|_{L^r[0,1]} \leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 f, 则对任何 p $(0<p<r)$,

都有

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \|_{L^p[0,1]} = 0.$$

上述反例说明了当 $p = r$ 时, 这个命题不再成立. 又, 当 $mE = +\infty$ 时, 这个命题也不成立. 例如, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n < x \leqslant n+1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 在 $E = [0, +\infty)$ 上处处收敛于 0, 且在 $L^2(E)$ 的范数下, 数列 $\{\|f_n\|_{L^2(E)}\}$ 有界, 然而

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L(E)} = 0$$

并不成立.

12. 一个在 E 上几乎处处收敛于 f 的函数序列 $\{f_n\} \subset L(E)$, 使 $\sup_n \|f_n\| = K < +\infty$, 而 $\{f_n\}$ 并不弱收敛于 f.

我们有如下的命题: 若 $\{f_n\} \subset L^p(E)$ $(1 < p < +\infty)$, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于函数 f, 又

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} = K < +\infty,$$

则 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f (参看 [39], pp.227—228). 应当注意, 当 $p = 1$ 时相应的命题并不成立. 例如, 在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1/n, 1]. \\ n, & x = 0, \\ \text{线性}, & x \in [0, 1/n]. \end{cases}$$

易见, 对任一 $x_0 \in (0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 0. 又

$$\sup_n \|f_n\|_{L[0,1]} = \sup_n \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 x) dx = \frac{1}{2}.$$

但是, 对于函数 $g(x) \equiv 1$ 而言, 恒有

$$\int_0^1 f_n(x) g(x) dx = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

因此 $\{f_n\}$ 并不弱收敛于 $f \equiv 0$.

13. R^1 **上的一个** (L) **可积的连续函数序列** $\{f_n\}$, **适合 (i)** $\lim_{|x|\to\infty} f_n(x)=0$, **(ii)** $\sup_n \|f_n\|_{L(R^1)}<+\infty$, **(iii)** $\{f_n\}$ **在** R^1 **上一致收敛于** f, **但** $\{f_n\}$ **中不存在子列** $\{f_{n_k}\}$ **使** $\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_{L(R^1)}=0$.

在 R^1 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & n\leqslant x\leqslant 2n,\\ 0, & x\leqslant n-1 \text{ 或 } x\geqslant 2n+1,\\ \text{线性}, & n-1\leqslant x\leqslant n \text{ 或 } 2n\leqslant x\leqslant 2n+1,\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 R^1 上连续且 (L) 可积. $\{f_n\}$ 还适合

(i) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_n(x)=0$,

(ii) $$\int_{R^1}|f_n(x)|dx=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n}(x-1-n)dx+\int_{n}^{2n}\frac{1}{n}dx+\int_{2n}^{2n+1}-\frac{1}{n}(x-2n-1)dx$$
$$=1+\frac{1}{n},$$

所以 $\sup_n\|f_n\|_{L(R^1)}=2<+\infty$.

(iii) 因为 $|f_n(x)|\leqslant 1/n,\ n=1,2,\cdots$, 故 $\{f_n\}$ 在 R^1 上一致收敛于 $f(x)\equiv 0$.

然而, 对于 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}\}$, 恒有

$$\int_{R^1}|f_{n_k}(x)-f(x)|dx=1+\frac{1}{n_k},$$

因此, $\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_{L(R^1)}\neq 0$.

第十一章

有界变差函数与绝对连续函数

---

0. 引言.

这一章处理有限区间上的有界变差函数与绝对连续函数方面的例子, 涉及的基本定义和命题给出如下:

设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 考察 $[a,b]$ 上的任意一组分点:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

当分点变动时, 称上确界

$$\sup_{[x_0,x_1,\cdots,x_n]} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\ f(x_k) - f(x_{k-1})\ | \right\}$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差 (或全变分), 并记为 $V_a^b(f)$. 若 $V_a^b(f) < +\infty$, 则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数 (或囿变函数).

有界变差函数的性质:

1° 单调函数是有界变差函数.

2° 有限个有界变差函数的和, 差与乘积仍为有界变差函数.

3° 两个有界变差函数之商 (分母不为零) 仍为有界变差函数.

4° (**Jordan 分解定理**) f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数的充要条件是 f 可表为两个不减的非负函数之差.

5° (**Lebesgue**) 若 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微.

推论 有界变差函数几乎处处可微.

设 f 是 $[a,b]$ 上的函数, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 恒有 $\delta > 0$, 使于 $[a,b]$ 上的任

意一组分点

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n,$$

只要 $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, 便有

$$\sum_{i=1}^{n} | f(b_i) - f(a_i) | < \varepsilon,$$

则称 f 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

绝对连续函数的性质:

6° 设 f 在 $[a,b]$ 上 (L) 可积, 则 f 的不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 其中 C 为常数.

7° 设 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 则 f' 在 $[a,b]$ 上 (L) 可积, 且有

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

8° 若 f 为 $[a,b]$ 上的 (L) 可积函数, 则有 $F(x)$ 使

(i) F 在 $[a,b]$ 上绝对连续,

(ii) 在 $[a,b]$ 上几乎处处有 $F'(x) = f(x)$.

又对于任何满足条件 (i) 和 (ii) 的函数 F, 恒有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

9° 绝对连续函数必是有界变差函数.

推论 绝对连续函数几乎处处可微.

10° 满足 Lipschitz 条件的函数是绝对连续的.

推论 若 f 在 $[a,b]$ 上可微且 f' 有界, 则 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

关于这些性质的证明以及有关这方面的更多材料, 可参看 [8], [14], [18], [27] 和 [98].

1. 一个非有界变差函数, 其绝对值是有界变差函数.

在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上无处连续, 因而 f 不是有界变差函数. 然而, $|f(x)| \equiv 1$ 是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

注 容易证明, 若 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则 $|f|$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 上述反例表明了这个陈述反过来是不正确的.

又, 可以证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, $|f|$ 在 $[a,b]$ 上有界变差, 则 f 在 $[a,b]$ 上也有界变差. 因此, 上述反例还表明了在这个陈述中, f 为连续的条件不可去掉.

2. 全变差为无穷大的可微函数.

下面的例子是由 Lebesgue [101] 作出的.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x^2), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(1/x^2)-(2/x)\cos(1/x^2), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此, f 在 $[0,1]$ 上处处可微. 然而, f 在 $[0,1]$ 上的全变差却是无穷大. 事实上, 我们在 $[0,1]$ 中取分点

$$0<\frac{1}{\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}<\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}}}<\cdots<\frac{1}{\sqrt{\pi+\dfrac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}<\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}<1,$$

于是便有

$$V=\left|\sin 1-\frac{2}{\pi}\right|+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}.$$

由此可见, $V_0^1(f)=+\infty$.

注 有界变差函数是几乎处处可微的. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

3. 不满足任何阶 Hölder 条件的有界变差函数.

作函数

$$f(x)=\begin{cases}-1/\ln x, & 0<x\leqslant 1/2,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 是 $[0,1/2]$ 上严格递增的连续函数, 因而它是 $[0,1/2]$ 上的有界变差函数.

但是, 对于任意的 $\alpha>0$, f 不满足 α 阶 Hölder 条件. 为证明这个结论, 我们先设 $0<\alpha\leqslant 1$, 并取 $x'=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\alpha}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\dfrac{1}{\ln x}}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0+}\alpha x^{-\alpha}=+\infty,$$

因而对任何正数 M, 存在 $x''\in(0,1/2]$, 使得

$$\frac{|f(x'')-f(0)|}{|x''-0|^\alpha}>M,$$

即 $|f(x'')-f(0)|>M|x''-0|^\alpha$. 也就是说, f 在 $[0,1/2]$ 上不满足 α 阶 Hölder 条件.

再设 $\alpha>1$. 若 f 满足 α 阶 Hölder 条件, 则易证 f 应为常值函数. 这是矛盾的, 故 f 不可能满足 α 阶 Hölder 条件.

注 满足 Lipschitz 条件的函数必是有界变差函数. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

4*. 满足 α $(0<\alpha<1)$ 阶 Hölder 条件而不是有界变差的函数.

设 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是任意的项为单调递减的正项收敛级数; 并设其和为 s. 在 $[0,s]$ 上构造函数 f:

$$f(x)=0,\ \text{在点}\ 0,a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,\cdots;$$
$$f(x)=\frac{1}{n},\text{在点}\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\ (n=1,2,\cdots);$$
$$f(s)=0;$$

$f(x)$ 在任意形如 $[a_1+\cdots+a_{n-1},\ a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}]$, $[a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2},a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n]$ 和 $[0,\frac{a_1}{2}],[\frac{a_1}{2},a_1]$ 的区间上是线性的 (这个函数的略图参看图 17). 这个函数在闭区间 $[0,s]$ 上连续, 且在其上的全变差为无穷大, 不管原先的级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是怎样的级数. 为了证明它的全变差为无穷大这个论断, 我们用点:

$$\frac{a_1}{2},a_1,a_1+\frac{a_2}{2},a_1+a_2,a_1+a_2+\frac{a_3}{2},\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_k$$

划分区间 $[0,s]$, 这里, k 是任意自然数; 对这一分法, 我们有

$$V=\left|f\left(\frac{a_1}{2}\right)-f(0)\right|+\left|f(a_1)-f\left(\frac{a_1}{2}\right)\right|+\left|f\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)-f(a_1)\right|$$
$$+\cdots+\left|f(a_1+\cdots+a_k)-f\left(a_1+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right)\right|+|f(s)-f(a_1+\cdots+a_k)|$$

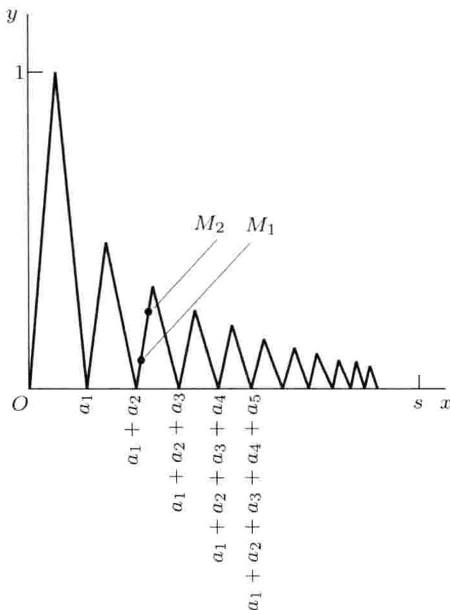


图 17

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

因而 $V_0^s(f) = +\infty$.

现在选择级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, 使函数 f 满足给定阶数的 Hölder 条件. 设 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 是属于函数图形上同一小区间上的两点 (参看图 17). 如果

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2},$$

那么 $|y_2 - y_1| = K|x_2 - x_1|$, 这里 $k = \frac{1}{n}\Big/\frac{a_n}{2} = \frac{2}{na_n}$. 因而

$$|y_2 - y_1| = \frac{2}{na_n}|x_2 - x_1| = \frac{2|x_2 - x_1|^{1-\alpha}}{na_n}|x_2 - x_1|^{\alpha}$$
$$< \frac{2a_n^{1-\alpha}}{na_n}|x_2 - x_1|^{\alpha} = \frac{2}{na_n^{\alpha}}|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

选择这样的 $\{a_n\}$, 使 $2/na_n^{\alpha}$ 是有界的 (对一切 n). 在不破坏级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性下, 这样的级数是可以作得出来的; 对此, 只要取 $a_n = n^{-1/\alpha}$ 就够了. 那么对属于函数图形上同一小区间上的任意两点 x_1 和 x_2, 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

现设 x_1 和 x_2 是区间 $[0, s]$ 上的任意两点, 不在函数图形上的同一小区间上, 例如:

$$x_1 \in \left[a_1 + \cdots + a_{k-1}, a_1 + \cdots + a_{k-1} + \frac{a_k}{2}\right];$$
$$x_2 \in \left[a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}, a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n\right].$$

这时, $k \leqslant n$ (图 18)[①]. 通过图形上的点 M_2 (横坐标为 x_2) 引水平直线, 找出它同点 M_1 (横坐标为 x_1) 所在的图形线段的交点; 设这个交点是 $M_2'(\xi, \eta)$. 易证 $|x_2 - x_1|$

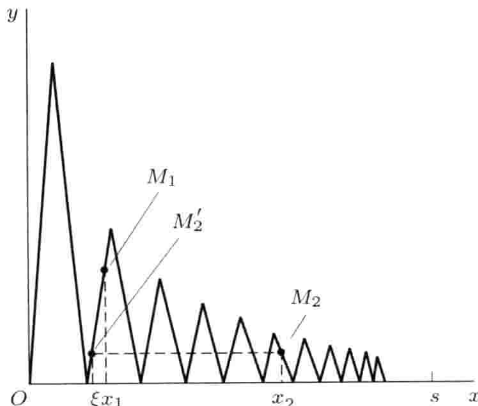


图 18

① 如果点 x_1 或 x_2 之一等于 s, 那么证明是类似的.

$> |\xi - x_1|$; 此外, $f(x_2) = f(\xi)$. 因而

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(\xi) - f(x_1)| \leqslant 2|\xi - x_1|^\alpha < 2|x_2 - x_1|^\alpha.$$

于是, 不等式 $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^\alpha$ 对区间 $[0, s]$ 上的任意两点 x_1, x_2 都成立; 即是说, 函数 f 在这个区间上满足 α 阶 Hölder 条件.

注 容易证明, 若函数 f 在有限区间 $[a, b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 f 在 $[a, b]$ 上满足任何 α $(0 < \alpha < 1)$ 阶 Hölder 条件. 又, 满足 Lipschitz 条件的函数是有界变差函数. 因此, 上述反例说明了在后一命题中, 不能把 Lipschitz 条件减弱为 α $(0 < \alpha < 1)$ 阶 Hölder 条件.

5*. 不满足任何 α $(\alpha > 0)$ 阶 Hölder 条件且不是有界变差的连续函数.

用 $\varphi_\alpha(x)$ 表例 4 中的函数, 它在 $[0, s]$ 上满足 α 阶 Hölder 条件, 但不满足任何 $\beta > \alpha$ 阶 Hölder 条件. 后一结论可以从

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi_\alpha(b_n) - \varphi_\alpha(c_n)|}{|b_n - c_n|^\beta} = +\infty$$

得出 (如果, 设 $b_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, $c_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$), 事实上,

$$\frac{|\varphi_\alpha(b_n) - \varphi_\alpha(c_n)|}{|b_n - c_n|^\beta} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{a_n}{2}\right)^\beta} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{1}{2n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\beta} = 2^\beta n^{\frac{\beta}{\alpha} - 1},$$

当 $n \to \infty$ 时, 最后的式子趋于无穷.

用 σ_n 表级数 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^n}$ 的和数. 现在, 我们构造要求的函数 f. 为此, 在 $[0, 1]$ 上给出点列:

$$0 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \cdots < \xi_n < \cdots$$

(这里 $\xi_n \to 1$, 当 $n \to \infty$ 时), 在每个区间 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上用下面的方法给出 f:

(i) 如果 n 是偶数, 那么, 命

$$f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (x - \xi_n)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right)$$

(这个函数可以由 $\varphi_{\frac{1}{n}}(x)$ 按纵坐标轴压缩 n 倍, 按横坐标轴压缩 $\sigma_n/(\xi_{n+1} - \xi_n)$ 倍, 且沿横坐标向右移动一个量 ξ_n 而得到).

(ii) 如果 n 是奇数, 那么, 命

$$f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (\xi_{n+1} - x)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right).$$

这样一来, 函数 f 在半闭区间 $[0, 1)$ 上处处有定义; 再用等式 $f(1) = 0$ 补充在点 $x = 1$ 的定义后, 我们得到的函数 f 在闭区间 $[0, 1]$ 上处处有定义而且连续. 函数 f 在这个闭区间上的全变差为无穷大 (函数 f 的略图, 参看图 19).

这个函数在区间 $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ 上满足 $1/n$ 阶 Hölder 条件, 但不满足 $1/(n-1)$ 阶 Hölder 条件; 因而, 它在整个区间 $[0, 1]$ 上不满足任何 $\alpha > 0$ 阶 Hölder 条件.

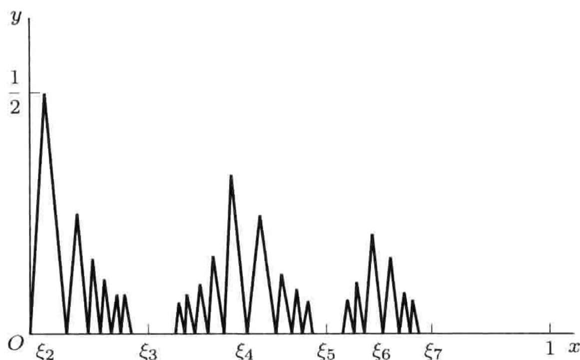


图 19

6. 在 $[0,1]$ 上连续而在 $[0,1]$ 的任一非空子区间上皆非有界变差的函数.

考虑区间 $[a,b]$. 设 $b=a+h\ (h>0)$, $x_k=a+h/2^k\ (k=1,2,\cdots)$ 为 $[a,b]$ 中的点列, 并如下定义函数 $\varphi(x;a,b)$:

(i) 当 $x\geqslant b$ 或 $x\leqslant a$ 时, $\varphi(x;a,b)=0$.

(ii) $\varphi(x_1;a,b)=h/2, \varphi(x_2;a,b)=0,\ \varphi(x_3;a,b)=h/3,\ \varphi(x_4;a,b)=0,\cdots$.

(iii) 在区间 $[x_1,b], [x_2,x_1],\cdots,[x_{k+1},x_k],\cdots$ 上, $\varphi(x;a,b)$ 为线性的.

显然, $\varphi(x;a,b)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 但不是有界变差的函数.

现作一列函数:

$$
\begin{aligned}
&f_1(x)=\varphi(x;0,1),\\
&f_2(x)=f_1(x)+\varphi(x;1/2,1),\\
&f_3(x)=f_2(x)+\varphi(x;1/4,1/2)+\varphi(x;3/4,1),\\
&f_4(x)=f_3(x)+\varphi(x;1/8,1/4)+\varphi(x;3/8,1/2)+\varphi(x;5/8,3/4)+\varphi(x;7/8,1),\\
&\quad\cdots.
\end{aligned}
$$

考虑级数

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}[f_n(x)-f_{n-1}(x)]=&\ \varphi(x;0,1)+\varphi(x;1/2,1)\\
&+\varphi(x;1/4,1/2)+\varphi(x;3/4,1)+\cdots.
\end{aligned}
$$

由于每一项不大于 $1/2$, 第二项不大于 $1/4$, 第三项与第四项之和不大于 $1/8$, 第五、六、七、八各项之和不大于 $1/16,\cdots$, 所以上面的级数在区间 $[0,1]$ 上是一致收敛的, 因而, 极限函数

$$
f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)
$$

在 $[0,1]$ 上也是连续的. 但是, f 在 $[0,1]$ 的任一非空子区间 $[\alpha,\beta]$ 上都不是有界变差的, 因为当 n 充分大时, $[\alpha,\beta]$ 总包含某个形如 $[k/2^n,(k+1)/2^n]$ 的区间, 而函数 $\varphi(x;k/2^n,(k+1)/2^n)$ 在此区间上不是有界变差的.

7. 在 $[0,1]$ 上有界变差而在 $[0,1]$ 的任一非空子区间上都不连续的函数.

在区间 $[0,1]$ 上如下构造函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 2k/2^n\leqslant x<(2k+1)/2^n,\\ 1/3^n, & (2k+1)/2^n\leqslant x<(2k+2)/2^n,\\ 1/3^n, & x=1,\end{cases}$$

其中 $k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上显然收敛, 其和函数记为 $f(x)$, 则 f 为 $[0,1]$ 上的单调递增函数, 因而为 $[0,1]$ 上的有界变差函数. 但是, 由函数序列的构造可见, 在 $x=k/2^n$ 处, $f(x)=f(x+0), f(x)\neq f(x-0)$. 因此, $x=k/2^n$ 为函数 f 的第一类不连续点. 由于集 $\{k/2^n: k=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1; n=1,2,\cdots\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 因而 f 的不连续点在 $[0,1]$ 中稠密. 由此可知. f 在 $[0,1]$ 的任一非空子区间上都不可能是连续的.

8. 两个有界变差函数, 构成非有界变差的复合函数.

设 $f(y)=y^{1/2}, 0\leqslant y\leqslant 1$, 则 f 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 从而它是 $[0,1]$ 上的有界变差函数. 再设

$$g(x)=\begin{cases}x^2\cos^2\dfrac{\pi}{2x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$g'(x)=\begin{cases}2x\cos^2\dfrac{\pi}{2x}+\pi\cos\dfrac{\pi}{2x}\sin\dfrac{\pi}{2x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

所以 $|g'(x)|\leqslant 2+\pi$. 因此, g 在 $[0,1]$ 上满足 Lipschitz 条件, 从而它也是 $[0,1]$ 上的有界变差函数. 但是, 复合函数

$$F(x)=f[g(x)]=\begin{cases}x\left|\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

并不有界变差. 事实上, 在 $[0,1]$ 中采取分点

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

那么容易证明

$$\begin{aligned}V&=\left|F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)\right|+\cdots+\left|F\left(\frac{1}{2n}\right)-F(0)\right|\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

因而得到 $V_0^1(F)=+\infty$.

9. 两个皆非有界变差的函数, 构成有界变差的复合函数.

设

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则 f 和 g 都是无处连续的函数, 从而它们在任何非空区间上都不是有界变差的函数. 然而, 复合函数 $f[g(x)] \equiv 1$ 却是任何区间上的有界变差函数.

10. 一个有界变差函数序列, 其上确界函数并不有界变差.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数 f 与 f_n $(n=1,2,\cdots)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\dfrac{1}{n},\\ 1, & x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right), n=1,2,\cdots,\\ \text{线性}, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{n},\\ f(x), & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

易见, 对每一 n, f_n 都是 $[0,1]$ 上的有界变差函数, 且 $f(x)=\sup_n f_n(x)$. 但 f 在 $[0,1]$ 上并不有界变差. 事实上, 在 $[0,1]$ 中取分点

$$0<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n-1}<\cdots<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1,$$

那么容易看出

$$\begin{aligned}V=&\left|f(1)-f\left(\frac{3}{4}\right)\right|+\left|f\left(\frac{3}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\cdots\\ &+\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right)-f(0)\right|\\ =&\,2n,\end{aligned}$$

从而得到 $V_0^1(f)=+\infty$.

11. 一个一致收敛的有界变差函数序列, 其极限函数并不有界变差.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数序列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在区间 $[0,1/n]$ 与 $[1/n,1]$ 上都是有界变差的, 因而它在 $[0,1]$ 上也是有界变差的 (参看 [27], 中译本 pp.269—270).

兹证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{\pi}{x}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

为此, 只要证明对任意正数 ε, 存在正整数 N (这里, 只要取 $N=[1/\varepsilon]$ 即可), 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[0,1]$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{1}$$

我们分下列三种情形来证明不等式 (1).

(i) 设 $n > N$ 且 $x \in (0, 1/n]$, 则

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x \sin \frac{\pi}{x}\right| \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(ii) 若 $x \in [1/n, 1]$, 则

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|x \sin \frac{\pi}{x} - x \sin \frac{\pi}{x}\right| = 0 < \varepsilon.$$

(iii) 若 $x = 0$, 则

$$|f_n(x) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

总之, 不论哪一种情形, 当 $n > N$ 时不等式 (1) 恒成立. 因此, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f. 然而, f 在 $[0,1]$ 上并不有界变差.

12. 一个不是有界变差的函数序列, 却一致收敛于一个有界变差函数.

设

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而它在 $[0,1]$ 上并不有界变差. 但是, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于有界变差函数 $f \equiv 0$.

13. 一个有界变差函数序列, 它的任何子列都有不收敛的点.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数序列

$$f_n(x) = \sin(2\pi 8^n x), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

在 $[0,1]$ 中取分点

$$0 < \frac{1}{8^n} \cdot \frac{1}{4} < \frac{1}{8^n} \cdot \frac{2}{4} < \cdots < \frac{1}{8^n} \cdot \frac{1}{4}(4 \cdot 8^n - 1) < 1.$$

容易证明, 在这些点的函数值之差的绝对值之和是 $4 \cdot 8^n$. 注意, 函数 f_n 在分点之间是单调的, 所以 f_n 在 $[0,1]$ 上的全变差就是 $4 \cdot 8^n$. 因此, 对每个正整数 n, f_n 都是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

现在任取子列 $\{f_{n_k}\}, n_1 < n_2 < \cdots$, 并令

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{8^n},$$

这里,

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n \neq n_k + 1, \\ 2, & n = n_k + 1 \text{ 且 } k \text{ 为偶数}, \\ 6, & n = n_k + 1 \text{ 且 } k \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

或

$$x_0 = \frac{6}{8^{n_1+1}} + \frac{2}{8^{n_2+1}} + \frac{6}{8^{n_3+1}} + \frac{2}{8^{n_4+1}} + \cdots + \frac{6}{8^{n_{2k-1}+1}} + \frac{2}{8^{n_{2k}+1}} + \cdots.$$

于是, 当 ν 为偶数 (例如 $\nu = 2k$) 时,

$$8^{n_\nu}\left(\frac{6}{8^{n_1+1}} + \frac{2}{8^{n_2+1}} + \frac{6}{8^{n_3+1}} + \frac{2}{8^{n_4+1}} + \cdots + \frac{6}{8^{n_{2k-1}+1}}\right)$$

为 1 的正整数倍, 而

$$\begin{aligned}&8^{n_\nu}\left(\frac{2}{8^{n_{2k}+1}}+\frac{6}{8^{n_{\nu+1}+1}}+\frac{2}{8^{n_{\nu+2}+1}}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{6}{8^{(n_{\nu+1}-n_\nu)+1}}+\frac{2}{8^{(n_{\nu+2}-n_\nu)+1}}+\cdots\\&<\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{8^n}<\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\end{aligned}$$

从而

$$\sin(2\pi\cdot 8^{n_\nu}x_0)>\cos\frac{\pi}{4}.$$

当 ν 为奇数 (例如 $\nu=2k+1$) 时,

$$8^{n_\nu}\left(\frac{6}{8^{n_1+1}}+\frac{2}{8^{n_2+1}}+\cdots+\frac{2}{8^{n_{2k-2}+1}}\right)$$

为 1 的正整数倍, 而

$$\begin{aligned}8^{n_\nu}\left(\frac{6}{8^{n_{2k-1}+1}}+\frac{2}{8^{n_{2k}+1}}+\cdots\right)&=\frac{3}{4}+\frac{2}{8^{(n_{\nu+1}-n_\nu)+1}}+\frac{6}{8^{(n_{\nu+2}-n_\nu)+1}}+\cdots\\&<\frac{3}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{8^n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{8},\end{aligned}$$

从而

$$\sin(2\pi\cdot 8^{n_\nu}x_0)<-\cos\frac{\pi}{4}.$$

由此可知, $\{f_{n_\nu}(x)\}$ 在 $x=x_0$ 不收敛.

14. 一个有界变差函数序列, 其全变差并不一致有界, 但有收敛的子列.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数序列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(2\pi\cdot 8^n x),\quad n=1,2,\cdots.$$

仿照例 13, 容易验证, f_n 在 $[0,1]$ 上的全变差是 $4\cdot 8n/n$, 因而函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上的全变差并不一致有界. 然而, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上却处处敛于零.

注 有如下的 Helly 定理: 设在 $[a,b]$ 上定义着无限个有界变差的函数 $F=\{f(x)\}$. 如果有常数 K, 使

$$|f(x)|\leqslant K,\quad \mathop{V}_a^b(f)\leqslant K$$

对于 F 中一切函数成立, 那么 F 中存在着收敛函数序列 $\{f_n(x)\}$, 其极限函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是有界变差的 (参看 [27], 中译本 pp.275—276).

例 13 说明了 Helly 定理中函数序列 $\{f_n\}$ 的全变差一致有界的条件是去不得的. 例 14 则说明了 Helly 定理中 $\{f_n\}$ 的全变差一致有界也不是必要条件.

15. 任给不连续函数 f, 可构造一个有界变差函数 g, 使 f 关于 g 的积分 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 不存在.

设 $f(x)$ 在点 $x=c$ $(a\leqslant c\leqslant b)$ 处不连续. 我们在 $[a,b]$ 上构造一个有界变差

函数 $g(x)$, 使 $g(x)$ 在点 c 处也不连续. 现证 f 关于 g 的积分不存在.

我们分成两种情况来讨论. 开始设 $a < c < b$ 且极限 $g(c-0)$ 与 $g(c+0)$ 不相等. 作 Riemann-Stieltjes 和时, 我们就不将 c 点取作分点, 譬如设 $x_k < c < x_{k+1}$. 一次取 $\xi_k \neq c$, 而另一次取 c 作为 ξ_k, 我们作出两个和 σ 及 $\overline{\sigma}$, 其差可化为

$$\sigma - \overline{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

将分点接近时, 有

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \to g(c+0) - g(c-0) \neq 0.$$

此外, 点 ξ_k 可这样取, 使差 $f(\xi_k) - f(c)$ 的绝对值大于某一正数. 则差 $\sigma - \overline{\sigma}$ 就不趋近于 0, 故积分不存在.

如果 $g(c-0) = g(c+0)$, 但它们的公共值异于 $g(c)$. 则相反地, 我们就将 c 取在分点之列, 设 $c = x_k$. 如果 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处例如有一右边的不连续, 则与刚才一样, 作两个和 σ 及 $\overline{\sigma}$, 仅由 ξ_k 的选取而不同: 对 σ, 点 ξ_k 任意取在 $x_k = c$ 及 x_{k+1} 之间, 而对 $\overline{\sigma}$, 点 c 就取作 ξ_k. 与前面一样, 我们有

$$\sigma - \overline{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

并且仿照前面的推演, 同样得到 f 关于 g 的积分不存在.

16. 任给全变差为无穷大的函数 g, 可构造一个连续函数 f, 使 f 关于 g 的积分 $\int_a^b f(x)dg(x)$ 不存在.

设 g 在闭区间 $[a,b]$ 上的全变差为无穷大. 若将区间 $[a,b]$ 平分, 则两个子区间中至少有一个使 g 的全变差亦为无穷大. 将这个子区间又平分, 如此继续下去. 用这样的方法确定出某一点 c (参看 [7], pp.70—71), g 在它的每一邻域上的全变差都为无穷大. 为简单起见, 设 $c = b$.

在这样的情况下容易作出一个单调递增的且趋近于 b 的数列 $\{a_n\}$:

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b,$$

使级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(a_{i+1}) - g(a_i)|$$

发散. 对于这一级数, 又可求得一趋近于 0 的数列 $f_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$, 使级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i |g(a_{i+1}) - g(a_i)|$$

亦发散 (参看第五章例 7). 现在我们来构造函数 f. 为此, 令

$$f(a_i) = f_i \operatorname{sgn}[g(a_{i+1}) - g(a_i)], \quad i = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$f(b) = 0,$$

而在区间 (a_i, a_{i+1}) 内, $f(x)$ 是线性的:

$$f(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(x - a_i), \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

显然, f 在 $[a,b]$ 上是连续的. 同时, 由于级数 $\sum_{i=0}^{\infty} f_i \mid g(a_{i+1})-g(a_i) \mid$ 发散的缘故, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)[g(a_{i+1})-g(a_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f_i|g(a_{i+1})-g(a_i)| \to +\infty \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 f 关于 g 的积分不存在.

注 由例 15 和例 16 可以得到下列原则性的断言: 如果 $[a,b]$ 上的一个函数 f, 使对 $[a,b]$ 上的任一有界变差函数 g, f 关于 g 的积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

恒存在, 那么 f 在 $[a,b]$ 上必定连续. 如果 $[a,b]$ 上的一个函数 g, 使对 $[a,b]$ 上的任一连续函数 f, f 关于 g 的积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

恒存在, 那么 g 在 $[a,b]$ 上必定有界变差.

17. 一个一致收敛的有界变差的函数项级数, 而不能几乎处处逐项微分.

在 $[0,1]$ 上定义函数序列如下:

$$(x)=\begin{cases} x-[x], & [x]\leqslant x<[x]+\dfrac{1}{2}, \\ 0, & x=[x]+\dfrac{1}{2}, \\ x-[x]-1, & [x]+\dfrac{1}{2}<x<[x]+1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$$

$$(2x)=\begin{cases} 2x-[2x], & [2x]\leqslant 2x<[2x]+\dfrac{1}{2}, \\ 0, & 2x=[2x]+\dfrac{1}{2}, \\ 2x-[2x]-1, & [2x]+\dfrac{1}{2}<2x<[2x]+1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$$

一般,

$$(nx)=\begin{cases} nx-[nx], & [nx]\leqslant nx<[nx]+\dfrac{1}{2}, \\ 0, & nx=[nx]+\dfrac{1}{2}, \\ nx-[nx]-1, & [nx]+\dfrac{1}{2}<nx<[nx]+1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$$

$n=1,2,\cdots,[x]$ 代表括号函数.

函数 (x) 在 $[0,1]$ 上只有不连续点 $x=\frac{1}{2}$; $(2x)$ 在 $[0,1]$ 上只有不连续点 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; 一般地, (nx) 在 $[0,1]$ 上只有不连续点 $x=\frac{m}{2n}$, 这里 $m=1,3,5,\cdots,2n-1$. 易见, 对每一 n, (nx) 都是 $[0,1]$ 上的有界变差函数, 而且 $|(x)|\leqslant\frac{1}{2}$, $|(2x)|\leqslant\frac{1}{2}$, 一般, $|(nx)|\leqslant\frac{1}{2}$. 因此, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛于某个函数 $f(x)$.

兹证 f 在 $[0,1]$ 上并不几乎处处可微. 为此, 取正整数 N. 并任取 $x_0\in[0,\frac{1}{2N})$, $x_0<x\in[0,\frac{1}{2N})$, 于是

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}.$$

设 $1/[2(m+1)]<|x-x_0|=\delta<1/(2m)$ (m 自然大于 N), 当 $1\leqslant n\leqslant m$ 时, $n|x-x_0|<n/(2m)\leqslant 1/2$, 所以

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}.$$

又

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2(m+1)\frac{1}{m}<4,$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}\right|$$

$$>\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-4.$$

这说明有限的 $f'(x_0)$ 不存在. 由于 x_0 是 $[0,\frac{1}{2N})$ 里的任意一点, 因此, f 在 $[0,\frac{1}{2N})$ 内无处可微, 从而不能在 $[0,1]$ 上几乎处处逐项求微分.

注 我们有如下的 Fubini 定理: 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义于 $[a,b]$ 上的递增函数, 而且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于某个函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且在 $[a,b]$ 上几乎处处有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x).$$

(参看 [8], pp.189—190). 上述反例说明了 Fubini 定理不得推广到有界变差函数项 (即使一致收敛) 级数.

18. 一个可微的有界变差函数 f, 使 $V(x)=\int_0^x|f'(t)|dt$ 不可微.

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos x^{-3/2}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的有界变差函数, 且

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos x^{-3/2}+3x^{-1/2}\sin x^{-3/2}/2, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

令

$$V(x)=\int_0^x|f'(t)|dt,$$

则当 $0<x\leqslant 1$ 时, 有 $V'(x)=|f'(x)|$. 因为

$$\begin{aligned}V'(0+)&=\lim_{x\to 0+}\frac{V(x)-V(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x|2t\cos t^{-3/2}+3t^{-1/2}\sin t^{-3/2}/2|dt\\&=\lim_{x\to 0+}|2x\cos x^{-3/2}+3x^{-1/2}\sin x^{-3/2}/2|\end{aligned}$$

并不存在, 所以 $V(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

19. $[0,1]$ **上的一个有界变差函数** f**, 使** $V_0^1(f)\neq\int_{-\infty}^{+\infty}K(y)dy$**, 其中** $K(y)$ **代表适合** $f(x)=y$ **的** x **的个数.**

在 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1/2,\\ 1, & x=1/2,\end{cases}$$

则 $V_0^1(f)=2$. 另一方面, 我们有

$$K(y)=\begin{cases}1, & y=1,\\ +\infty, & y=0,\\ 0, & y\neq 0,\ y\neq 1,\end{cases}$$

因而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(y)dy=0.$$

注 我们有如下的 Banach 定理: 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界变差的连续函数, 又设 y 是一实数, $K(y)$ 表示适合 $f(x)=y$ 的 x 的个数 ($K(y)$ 可以为 $+\infty$), 那么 f 在 $[a,b]$ 上的全变差等于 Lebesgue 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(y)dy$$

(参看 [8], pp.319—320). 上述反例说明了在这个命题中, 函数 f 为连续的条件不可去掉.

20. 非常值的局部循环的无处单调的有界变差函数.

函数 $f(x)$ 称为在 x 处局部循环, 如果在 x 的每个邻域内都存在一个异于 x 的点 x', 使得 $f(x')=f(x)$. 局部循环函数的概念是由 Buch 于 1962 年引进的 [50]. 刘文 [2] 也作出了一类局部循环函数. 我们这里介绍的是一个非常值的局部循环的无处单调的有界变差函数.

Mauldon [112] 提出如下的问题: 是否存在区间 $[a,b]$ 上的非常值的局部循环的连续有界变差函数?

Marcus [111] 指出, 这样的函数并不存在. 然后他问: 是否存在 $[a,b]$ 上的非常值的局部循环的无处单调的有界变差函数?

Darst [60] 肯定地回答了这个问题. 他的构造法如下:

设 $(c,d]$ 是半开区间, $a \leqslant c < d \leqslant b$, $t_i = c + i/b(d-c), i = 0,1,2,\cdots,6$, 又设 $p > 0$. 在 $[a,b]$ 上定义函数 $g(c,d,p)$ 如下:

$$g(c,d,p) = \begin{cases} (-1)^{i+1}p, & x \in (t_i, t_{i+1}],\ i = 1,2,3,4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意, $g(c,d,p)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差为 $8p$. 对每一正整数 n, 把 $[a,b]$ 分成长为 $(b-a)6^{-(n-1)}$ 的 6^{n-1} 个子区间 $(c_i,d_i]$, 并设 p_n 是满足等式

$$6^{(n-1)}8p_n = 2^{-n}$$

的正数. 令

$$f_n = \sum_i g(c_i,d_i,p_n), \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

易见, 函数 f 具有所需的性质.

21. $[0,2\pi]$ **上的一个一致收敛于某个有界变差函数** f **的有界变差函数序列** $\{f_n\}$**, 使** $\lim_{n\to\infty} V_0^{2\pi}(f_n) \neq V_0^{2\pi}(f)$.

下面的例子是由 Cesari [56] 作出的.

设 $f(x) \equiv 0, f_n(x) = n^{-1}\sin n^s x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, 其中 s 是实数, 使 n^s 是正整数. 易见, $\{f_n\}$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛于 f. 又

$$V_0^{2\pi}(f) = 0, \quad V_0^{2\pi}(f_n) = 4n^{s-1}.$$

于是, 当 $s=1$ 时, 有

$$0 = V_0^{2\pi}(f) < \lim_{n\to\infty} V_0^{2\pi}(f_n) = 4;$$

而当 $s=2$ 时, 有

$$0 = V_0^{2\pi}(f) < \lim_{n\to\infty} V_0^{2\pi}(f_n) = +\infty.$$

22*. $[0,1]$ **上的一个可微函数** f**, 使** $Z = \{x : f'(x) = 0\}$ **及** Z^c **均在** $[0,1]$ **中稠密, 但** f' **在** $[0,1]$ **上并不** (L) **可积.**

称 $[a,b]$ 上的函数 f 为 P 型函数, 如果 f 可微且 f' 在 $[a,b]$ 上有界, $Z = \{x : f'(x) = 0\}$ 及 Z^c 在 $[a,b]$ 中稠密. 称 f 为 P_1 型函数, 如果 f 可微且 f' 在 $[a,b]$ 上有界, Z 在 $[a,b]$ 内稠密. 称 f 为 P_2 型函数, 如果 f 可微, 且 Z 及 Z^c 在 $[a,b]$ 内稠密.

Marcus [110] 于 1963 年指出, P 型函数的导函数未必 (R) 可积, 但因导函数有界且 (L) 可测, 故必 (L) 可积. 他还提出问题: P_2 型函数的导函数是否必为 (L) 可积?

Bruckner [48] 指出, 存在 P_2 型函数, 其导函数并不 (L) 可积. 为构造这种函数, 我们先证明下面的

引理 1 设 $a<b$, 则存在 P 型函数 f, 使 $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

证 设 g 是 $[0,1]$ 上的 P 型函数, α,β 是 $[0,1]$ 中的点, 满足 $0\leqslant\alpha<2\beta-\alpha\leqslant 1$, 使

$$g'(\alpha)=g'(\beta)=0.$$

这种点的存在性可据 $\{x:g'(x)=0\}$ 在 $[0,1]$ 内稠密而得到. 在 $[\alpha,2\beta-\alpha]$ 上定义函数 h:

$$h(x)=\begin{cases}g(x)-g(\alpha), & \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\\ g(2\beta-x)-g(x), & \beta<x\leqslant 2\beta-\alpha.\end{cases}$$

易见, h 是 $[\alpha,2\beta-\alpha]$ 上的 P 型函数, 且

$$h(\alpha)=h(2\beta-\alpha)=h'(\alpha)=h'(2\beta-\alpha)=0.$$

设 L 是 $[a,b]$ 到 $[\alpha,2\beta-\alpha]$ 上的线性变换, 不难看出, 由等式 $f(x)=h[L(x)]$ 定义的函数 f 满足引理 1 的条件.

引理 2 设 $a<b,\varepsilon>0$, 则存在 $[a,b]$ 上的 P 型函数 f, 使

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|<\varepsilon \quad 且 \quad V_a^b(f)>1.$$

证 设 f_1 是 $[a,b]$ 上的 P 型函数, 使

$$f_1(a)=f_1(b)=f_1'(a)=f_1'(b)=0,$$

这种函数的存在性是由引理 1 保证的. 令

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_1(x)|,\quad v=V_a^b(f_1),$$

并由等式 $f_2(x)=\varepsilon f_1(x)/2M$ 定义函数 f_2, 则 f_2 是 $[a,b]$ 上的 P 型函数, 且 f_2, f_2' 在 a,b 处的值为 0, 又

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_2(x)|<\varepsilon,\quad V_a^b(f_2)=v\varepsilon/(2M).$$

令 N 是大于 $2M/(v\varepsilon)$ 的正整数, 并设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b.$$

把 $[a,b]$ 分为 N 个相等长度的子区间. 令 L_k 是 $[a,b]$ 到 $[x_{k-1},x_k]$ 上的递增的线性变换, 并定义函数 g_k 为

$$g_k(x)=f_2[L_k(x)],$$

则每个 g_k 都是 $[x_{k-1},x_k]$ 上的 P 型函数, 且 g_k,g_k' 在 x_{k-1},x_k 处的值均为 0. 此外,

$$\max_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}|g_k(x)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_2(x)|<\varepsilon,\quad V_{x_{k-1}}^{x_k}(g_k)=\frac{v\varepsilon}{2M}.$$

最后定义函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ g_k(x), & x_{k-1}<x\leqslant x_k,\ k=1,2,\cdots,N,\end{cases}$$

则 f 是 $[a,b]$ 上的 P 型函数, 且

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0,$$

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|<\varepsilon,\quad V_a^b(f)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}V_{x_{k-1}}^{x_k}(g_k)=\frac{Nv\varepsilon}{2M}>1.$$

引理 2 证毕.

我们现在着手构造 $[0,1]$ 上的一个 P_2 型函数, 其导函数并不 (L) 可积. 为此, 设

$$1=x_1>x_2>x_3>\cdots$$

是递减且趋于 0 的实数序列, 对每一 n, 令 f_n 是 $[x_{n+1},x_n]$ 上的 P 型函数, 使

$$f_n(x_{n+1})=f_n(x_n)=f_n'(x_{n+1})=f_n'(x_n)=0,$$

且在 $[x_{n+1},x_n]$ 上有 $|f_n(x)|<x^2$ 及

$$V_{x_{n+1}}^{x_n}(f_n)>1.$$

在 $[0,1]$ 上定义函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ f_n(x), & x_{n+1}<x\leqslant x_n,\ n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

则 f 是 P_2 型函数. 显然, f 在 $[0,1]$ 上并不有界变差, 从而 f' 在 $[0,1]$ 上并不 (L) 可积.

23*. $[0,1]$ 上的一个可微函数 f, 使 f' 有界且 $Z=\{x:f'(x)=0\}$ 及 Z^c 在 $[0,1]$ 内稠密, $Z\neq\{x:f'$ 在 x 连续$\}$.

设 f 是 $[a,b]$ 上的 P 型函数, 令 $K=\{x:f'$ 在 x 连续$\}$, $Z=\{x:f'(x)=0\}$. 显然, $K\subset Z$. Marcus [110] 问: 对 P 型函数 f, K 与 Z 是否必定相等? Bruckner [48] 指出, 这个问题的答案是否定的. 他的例子如下:

设 $1=x_1>x_2>\cdots$ 是递减且趋于 0 的实数序列, 对每一 n, 仿照例 22 中的引理 1, 存在 $[x_{n+1},x_n]$ 上的 P 型函数 f_n, 使

$$f_n(x_{n+1})=f_n(x_n)=f_n'(x_{n+1})=f_n'(x_n)=0,$$

$$\max_{x_{n+1}\leqslant x\leqslant x_n}|f_n'(x)|=1,\qquad \max_{x_{n+1}\leqslant x\leqslant x_n}|f_n(x)|<(n+1)^{-2}.$$

在 $[0,1]$ 上定义函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ f_n(x), & x_{n+1}<x\leqslant x_n,\ n=1,2\cdots.\end{cases}$$

由不等式 $\max_{x_{n+1}\leqslant x\leqslant x_n}|f_n(x)|<(n+1)^{-2}$ 可知, 在 $[0,1]$ 上有 $|f(x)|<x^2$, 从而 $f'(0)=0, 0\in Z$. 另一方面, 在以 0 为聚点的某个点集上有 $|f'(x)|=1$, 因此, f' 在 $x=0$ 处不连续, 故 $0\overline{\in}K$. 最后, $\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|=1$ 且 Z 及 Z^c 在 $[0,1]$ 内显然都是稠密的, 故 f 是 P 型函数.

24. 一个绝对连续函数 f, 使 $|f|^p$ $(0<p<1)$ 不是绝对连续函数.

可以证明, 如果 f 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 那么 $|f|^p$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 也是

$[a,b]$ 上的绝对连续函数. 应当注意, 当 $0 < p < 1$ 时, 相应的命题并不成立. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{\pi}{2x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 f 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数. 然而, $|f|^{1/2}$ 在 $[0,1]$ 上并不绝对连续.

25. 一致连续而不绝对连续的函数

设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 f 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 从而它在 $[0,1]$ 上一致连续. 然而, f 在 $[0,1]$ 上的全变差为无穷大 (参看例 2), 因此, 它在 $[0,1]$ 上并不绝对连续.

注 容易证明, 绝对连续函数必定是一致连续的. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

26. 两个绝对连续函数, 构成不绝对连续的复合函数.

设

$$f(y) = y^{1/3}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \cos^3(\pi/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $y \neq 0$ 时, $f'(y) = y^{-2/3}/3$. 又当 $-1 < x < 0$ 时,

$$\int_{-1}^{x} f'(y)dy = \frac{1}{3}\int_{-1}^{x} y^{-2/3}dy = x^{1/3} + 1 = f(x) - f(-1).$$

而当 $0 < x < 1$ 时,

$$\int_{-1}^{x} f'(y)dy = \int_{-1}^{0} f'(y)dy + \int_{0}^{x} f'(y)dy$$
$$= -(-1) + x^{1/3} = f(x) - f(-1).$$

因之,

$$f(x) = \int_{-1}^{x} f'(y)dy - 1.$$

可见 $f(y) = y^{1/3}$ 是 $[-1,1]$ 上的绝对连续函数.

其次, 我们有

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos^3(\pi/x) + 3x\sin(\pi/x)\cos^2(\pi/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

所以 $|g'(x)| \leqslant 6$, 从而 $g(x)$ 也是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数.

兹考虑复合函数

$$f[g(x)] = \begin{cases} x\cos(\pi/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

不难验证, $f \circ g$ 在 $[0,1]$ 上的全变差为无穷大, 因而它不是绝对连续的函数.

27. 两个皆非绝对连续的函数, 而构成绝对连续的复合函数.

设 $f(x) = 1 + x - [x]$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$, 则 f 与 g 在 $[-1,1]$ 上皆非绝对连续. 然而, 复合函数

$$f[g(x)] = 1 + \operatorname{sgn} x - [\operatorname{sgn} x] = 1$$

在 $[-1,1]$ 上是绝对连续的.

28. 不满足某些 Hölder 条件的绝对连续函数.

设 $f(x) = x^{1/3}, 0 \leqslant x \leqslant 1$, 则 f 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数 (参看例 26).

兹证对于 $\alpha > 1/3$ 而言, f 在 $[0,1]$ 上不满足 α 阶 Hölder 条件. 事实上, 假若不然, 即存在正常数 M, 使对任何 $x_1, x_2 \in [0,1]$, 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^\alpha.$$

特别, 也应当有

$$|f(x)| \leqslant Mx^\alpha, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

即 $x^{\frac{1}{3}-\alpha} \leqslant M$. 因为 $\frac{1}{3} - \alpha < 0$, 故当 $x \to 0+$ 时, $x^{\frac{1}{3}-\alpha} \to +\infty$. 这样, 就得到了预期的矛盾.

29*. 无处单调的绝对连续函数.

第一例 设 f 是第三章例 38 中的函数, 它在 $[0,1]$ 上无处单调并且可微, 此外, 还满足

$$|f'(x)| \leqslant M.$$

因此, f 是 $[0,1]$ 上的无处单调的绝对连续函数.

第二例 设 E 为 $[0,1]$ 的具有如次性质的子集: 使对任何非空开区间 $I \subset [0,1]$, 都有

$$m(I \cap E) > 0, \quad m(I \cap E^c) > 0$$

(参看第七章例 14). 令

$$f(x) = \int_0^x [\varphi_E(t) - \varphi_{E^c}(t)]dt,$$

其中 φ_E 为 E 的特征函数. 于是, f 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数. 由此可知, f 在 $[0,1]$ 上几乎处处可微, 且等式

$$f'(x) = \varphi_E(x) - \varphi_{E^c}(x)$$

在 $[0,1]$ 上几乎处处成立 (参看 [6], pp.127—128).

现在我们任取非空开区间 $I \subset [0,1]$, 由于 $m(I \cap E) > 0$ 与 $m(I \cap E^c) > 0$ 同时成立, 因而必定存在如此的 $x_1 \in I \cap E$ 与 $x_2 \in I \cap E^c$, 使得 f 在 x_1 与 x_2 处均可微, 而且等式

$$f'(x_1) = \varphi_E(x_1) - \varphi_{E^c}(x_1)$$

与

$$f'(x_2) = \varphi_E(x_2) - \varphi_{E^c}(x_2)$$

都成立. 我们注意, x_1 与 x_2 都属于 I, 而且

$$f'(x_1) = \varphi_E(x_1) = 1 > 0,$$
$$f'(x_2) = -\varphi_{E^c}(x_2) = -1 < 0.$$

这意味着绝对连续函数 f 在非空区间 I 上不是单调的. 由于 I 是 $[0,1]$ 中的任一非空开区间, 因而 f 是 $[0,1]$ 上的无处单调的绝对连续函数.

30*. 一个可微函数, 其导数在任何非空区间上 (L) 可积而不 (R) 可积.

设 H 是第三章例 38 中的函数, 因为 H' 有界, 故由中值定理, H 在 R^1 的每个非空闭区间上都是绝对连续的, 且对任意 $x \in R^1$, 有

$$H(x) = H(0) + \int_0^x H'(t)dt.$$

兹证 H' 在任何非空闭区间 $[a,b]$ 上均不 (R) 可积. 假若不然, 则 H' 在 $[a,b]$ 上应当几乎处处连续. 易见, 若 H' 在 x 处连续, 则 $H'(x) = 0$. 因此, H' 在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0. 由于 H 为一绝对连续函数, 从而 H 为一常值函数. 此为矛盾.

这个例子是由 Katznelson 和 Stromberg [96] 作出的.

31. 一个具有性质 (N) 的函数, 它不是绝对连续的函数.

假如对于测度为零的任何集 E, $f(E)$ 的测度仍为零, 那么称 f 具有性质 (N).

绝对连续函数具有性质 (N) (参看 [27], 中译本 p.307). 然而, 具有性质 (N) 的函数不必是绝对连续的. 为构造这种反例, 我们设 F 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, (a_n, b_n) 为它的邻接区间. 令 $c_n = (a_n + b_n)/2$, 并在 $[0,1]$ 上定义函数 f 如次:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in F, \\ 1/n, & x = c_n, \\ \text{线性}, & x \in [a_n, c_n] \text{ 或 } x \in [c_n, b_n]. \end{cases}$$

易见, f 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

在 $[0,1]$ 中任取测度为零的子集 E, 因为

$$E = (E \cap F) \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap (a_k, b_k)) \right\},$$

所以

$$f(E) = f(E \cap F) \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} f(E \cap (a_k, b_k)) \right\}.$$

由于 f 在 $[a_k, c_k]$ 及 $[c_k, b_k]$ 上是线性的, 因而

$$mf(E \cap (a_k, b_k)) = 0$$

(参看 [82], 中译本 pp.67—69). 又因为 $f(E \cap F)$ 是空集或单元素 0 所成之集, 所以 $mf(E \cap F) = 0$. 于是得到 $mf(E) = 0$. 因此, f 具有性质 (N).

另一方面, 任取 F 的 n 个邻接区间 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n)$, 不妨设

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$

对于分点

$$0 < a_1 < c_1 < b_1 < \cdots < a_n < c_n < b_n < 1,$$

我们有

$$\begin{aligned} V &= |f(1) - f(b_n)| + |f(b_n) - f(c_n)| + \cdots + |f(c_1) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(0)| \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

因此, $V_0^1(f) = +\infty$. 由此可知, f 在 $[0, 1]$ 上并不绝对连续.

32. 一个一致收敛的绝对连续函数序列, 其极限函数并不绝对连续.

我们先要证明下面的

引理 如果 f 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ $(a < c < b)$ 上都是绝对连续的, 那么它在 $[a, b]$ 上也是绝对连续的.

证 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使于 $[a, c]$ 中的任意一组分点

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n,$$

只要 $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta_1$, 便有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

同理, 存在 $\delta_2 > 0$, 使于 $[c, b]$ 中的任意一组分点

$$\gamma_1 < \eta_1 < \gamma_2 < \eta_2 < \cdots < \gamma_m < \eta_m,$$

只要 $\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \gamma_i) < \delta_2$, 便有

$$\sum_{i=1}^{m} |f(\eta_i) - f(\gamma_i)| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

为证 f 在 $[a, b]$ 上绝对连续, 我们在 $[a, b]$ 中任取一组分点

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_j < b_j,$$

不妨设 $a_k < c < b_k$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $\sum_{i=1}^{j}(b_i - a_i) < \delta$ 时, 由 (1), (2)

可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)| &= \sum_{i=1}^{k-1}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{i=k+1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)| \\ &\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{k-1}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(c)-f(a_k)|\right\} \\ &\quad+\left\{\sum_{i=k+1}^{j}|f(b_i)-f(a_i)|+|f(b_k)-f(c)|\right\} \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, f 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的.

兹在 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1/n,\\ x\sin(\pi/x), & 1/n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 $[0,1/n]$ 与 $[1/n,1]$ 上都是绝对连续的. 于是, 由引理可知, f_n 在 $[0,1]$ 上也是绝对连续的. 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x\sin(\pi/x), & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=[1/\varepsilon]$, 则当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[0,1]$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f. 然而, 由于 f 在 $[0,1]$ 上并不有界变差, 因而它在 $[0,1]$ 上也不绝对连续.

33. 一个不是绝对连续的函数序列, 却一致收敛于一个绝对连续的函数.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数序列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

则对每一 n, f_n 在 $[0,1]$ 上均非绝对连续. 然而, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于绝对连续的函数 $f\equiv 0$.

34. 任给 $[0,1]$ 中测度为零的集 E, 可构造 $[0,1]$ 上的一个不减的绝对连续函数 f, 使对每一 $x\in E$, 都有 $f'(x)=+\infty$.

因为 $mE=0$, 所以对每一 n, 可作开集 G_n, 使 $G_n\supset E$, 且 $mG_n<1/2^n$. 令

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{G_k}(x),$$

其中 φ_{G_k} 代表集 G_k 的特征函数. 于是, g_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[0,1]$ 上的一串非负简单函数, 且

$$g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

因此, $\{g_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于某个 (L) 可积函数 g. 令

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

因为 $g(t)\geqslant 0$, 所以 f 是 $[0,1]$ 上的一个不减的绝对连续函数.

任取 $x_0\in E$, 因为 $E\subset G_k$ $(k=1,2,\cdots)$, 所以对每一正整数 n, 总可找到这样的正数 h, 使得

$$[x_0,x_0+h]\subset G_k\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是就有

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}&=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}g(t)dt\geqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}g_n(t)dt\\&=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi_{G_k}(t)dt=n.\end{aligned}$$

由此可见, $f'(x_0+)=+\infty$. 同理可证 $f'(x_0-)=+\infty$. 因此, $f'(x_0)=+\infty$. 由于 $x_0\in E$ 是任取的, 因而对每一 $x\in E$, 都有 $f'(x)=+\infty$.

35*. 一个严格递增的连续函数, 它并不绝对连续.

第七章例 31 中的函数 f, 它是 $[0,1]$ 上的一个严格递增的连续函数, 且把 $[0,1]$ 中某个测度为零的集映成测度大于零的集. 因为绝对连续函数把测度为零的集映成测度为零的集 (参看 [27], 中译本 p.307), 所以 f 不可能是绝对连续的函数.

36*. 一个在 $[0,1]$ 上严格递增的连续函数, 它在任何非空区间 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ 上都不是绝对连续的.

设 $\varphi(x)$ 是第七章例 31 中的严格递增的连续函数, 又设 B 也是该章例 31 中所论及的区间 $[0,1]$ 的子集, 它具有如次的性质:

(i) $mB=1$; (ii) 若令 $B^*=\varphi(B)$, 则 $mB^*=0$.

现在我们任取非空区间 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$, 则

$$[\alpha,\beta]\cap B\subset B,\quad \varphi([\alpha,\beta]\cap B)\subset B^*.$$

因为 $mB=1, mB^*=0$, 所以得到

$$m([\alpha,\beta]\cap B)=\beta-\alpha,\quad m\varphi([\alpha,\beta]\cap B)=0.$$

令 $A=[\alpha,\beta]\setminus[\alpha,\beta]\cap B$, $A^*=\varphi(A)$, 则 $mA=0$, $mA^*=\beta-\alpha>0$. 即是说, φ 把 $[\alpha,\beta]$ 中测度为零的集 A 映成测度大于零的集 A^*. 因此, φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不可能是绝对连续的.

37. 一个严格递增的绝对连续函数, 它把某个测度大于零的集映成测度等于零的集.

设 E 为 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, 又设 (α_i,β_i) $(i=1,2,\cdots)$ 为 E 的全体邻接区间. 令

$$g(x)=\begin{cases}(x-\alpha_i)(\beta_i-x), & x\in(\alpha_i,\beta_i),\ i=1,2,\cdots,\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

易见, g 是区间 $[0,1]$ 上的非负的连续函数. 再令

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

兹证, f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的绝对连续函数. 事实上, 由于 f 是 (L) 可积函数 g 的不定积分, 因而它是绝对连续的. 为证 f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的, 我们在 $[0,1]$ 中任取两点 x_1 及 x_2, 并设 $x_1>x_2$.

(i) 若 x_1,x_2 同属于某个邻接区间 (α_k,β_k), 则因连续函数 g 在 (α_k,β_k) 内恒取正值, 故有

$$f(x_1)-f(x_2)=\int_{x_2}^{x_1} g(t)dt>0.$$

(ii) 若 x_1,x_2 不属于同一个邻接区间, 则据 Cantor 集的构造, 一定存在某个邻接区间 (α_i,β_i), 使 $(\alpha_i,\beta_i)\subset(x_2,x_1)$. 由于 g 非负而且连续, 又在 (α_i,β_i) 内恒取正值, 因而

$$f(x_1)-f(x_2)=\int_{x_2}^{x_1} g(t)dt\geqslant\int_{\alpha_i}^{\beta_i} g(t)dt>0.$$

这就证明了 f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的.

最后, 我们要证明 f 把正测度集 E 映成零测度集. 我们注意, 下列等式均成立:

$$[0,1]=E\cup\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\right\},\quad E\cap\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\right\}=\varnothing.$$

$$f([0,1])=f(E)\cup f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\right)=f(E)\cup\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}f((\alpha_i,\beta_i))\right\};$$

$$f(E)\cap\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}f((\alpha_i,\beta_i))\right\}=\varnothing,$$

$$f((\alpha_i,\beta_i))\cap f((\alpha_j,\beta_j))=\varnothing\quad(i\neq j).$$

因为 f 绝对连续, 所以它把可测集映成可测集. 于是, 由测度的完全可加性得到

$$mf([0,1])=mf(E)+\sum_{i=1}^{\infty}mf((\alpha_i,\beta_i)).\tag{1}$$

又因为 f 在 $[0,1]$ 上是严格递增的, 所以

$$\begin{aligned}mf([0,1])&=m[f(0),f(1)]=f(1)-f(0)\\&=\int_0^1 g(t)dt=\int_E g(t)dt+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}g(t)dt\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}g(t)dt,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}mf((\alpha_i,\beta_i))=\sum_{i=1}^{\infty}(f(\beta_i)-f(\alpha_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}g(t)dt.\tag{3}$$

比较 (2), (3) 两式, 就得到

$$mf([0,1]) = \sum_{i=1}^{\infty} mf((\alpha_i, \beta_i)).$$

于是, 再由 (1) 式可知, $mf(E) = 0$. 即 f 把正测度集 E 映成零测度集 $f(E)$.

38. 一个严格递增的绝对连续函数, 其反函数并不绝对连续.

设 f 是例 37 中的严格递增的绝对连续函数, 它把 $[0,1]$ 中的正测度集 E 映成零测度集 $f(E)$. 设 f^{-1} 是 f 的反函数, 则 f^{-1} 把区间 $[f(0), f(1)]$ 中的零测度集 $f(E)$ 映成正测度集 E. 由此可知, f^{-1} 在 $[f(0), f(1)]$ 上不是绝对连续的 (参看 [27], 中译本 p.307).

第十二章

Fourier 级数

---

0. 引言.

称级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

为三角级数, 其中 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 和 b_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是与 x 无关的实数; 而称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx) \tag{2}$$

为级数 (1) 的共轭级数.若令

$$a_{-n}=a_n\ (n>0),\quad b_0=0,\quad b_{-n}=-b_n\ (n>0),\quad c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),$$

则级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx} \tag{3}$$

的部分和 $\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$ 把指标异号的项相加, 即得

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

所以我们称 (1) 为实的三角级数, 而称 (3) 为 (1) 的复的形式, 考虑 (3) 的收敛时, 总指 $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$ 存在的意义.

我们从区间 $(-\pi,\pi]$ 上的 (L) 可积 ((R) 可积[①]) 实函数 f 出发, 为方便起见, 我们对一切实数 x, 定义 f 为一周期等于 2π 的函数, 于是只要 f 对 x 的一个值有

① 本章所说的 (R) 可积, 是指常义 (R) 可积或广义 (R) 可积.

定义, 就有 $f(x+2\pi)=f(x)$, 特别, $f(\pi)=f(-\pi)$. 令

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \tag{4}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx. \tag{5}$$

则如此所得的级数 (1) 和 (3) 称为函数 f 的 Fourier-Lebesgue 级数 (Fourier-Riemann 级数), 简称为 Fourier 级数; 而称 a_n,b_n,c_n 为函数 f 的 Fourier-Lebesgue 系数 (Fourier-Riemann 系数), 简称 Fourier 系数. 一般地说, 若 (4) 或 (5) 都依某种意义存在时, 就称 (1) 或 (3) 为某种意义下的 Fourier 级数.

设 F 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界变差函数, 令

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdF(x),\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdF(x), \tag{6}$$

这里的积分是 Riemann-Stieltjes 积分, 此时称级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 dF 的 Fourier-Stieltjes 级数.

因为 (4),(5) 和 (6) 中所有函数都是以 2π 为周期的函数, 所以我们可以将积分区间改为任意的 $[\xi,\xi+2\pi]$. 特别, 时常可用 $[0,2\pi]$ 代替 $[-\pi,\pi]$.

现在我们陈述一些断语, 这些断语在构造本章的某些例子时要用的.

1° (**Abel 变换**) 设 $s_k=a_0+a_1+\cdots+a_k$ $(k\geqslant 0)$, 则

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})-s_{m-1}b_m+s_nb_n,$$

其中 $0\leqslant m\leqslant n$ 而 $s_{-1}=0$ (参看 [180], p.3).

2° 倘若一个级数收敛于有限值 (或者发散于具有定号的无穷大), 那么它也可以用算术平均值法求和而得到同样的值.

3° (**Lebesgue**) 假设 $u_n\in L(E)$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E|u_n(x)|dx<+\infty,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛 (而且绝对收敛) 于某个函数 $u\in L(E)$ (参看 [180], p.73).

4° (**Riemann-Lebesgue 引理**) 设 $f\in L(E)$, 那么

$$\lim_{t\to+\infty}\int_E f(x)\sin txdx=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\int_E f(x)\cos txdx=0.$$

设 f 是以 2π 为周期的 (L) 可积函数, 令

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan\dfrac{t}{2}}dt, \tag{7}$$

称函数 $\bar{f}$ 为 f 的共轭函数. Привалов 曾经证明, 极限 (7) 对于几乎所有的 $x\in[0,2\pi]$ 都存在 (参看 [180], p.146).

我们用 $s_n(t,f)$ 代表函数 f 的 Fourier 级数在一点 t 处的 n 阶部分和; 则有

$$s_n(t,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(x-t)dx,$$

其中

$$D_n(u)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u},$$

称 D_n 为 Dirichlet 核, 若令 $f_n(x)=\operatorname{sgn}D_n(x)$, 则

$$s_n(0,f_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|dx.$$

称 $L_n=s_n(0,f_n)$ 为 Lebesgue 常数 (参看 [180], p.20).

5° $L_n\simeq(4/\pi^2)\ln n(n\to\infty)$[①].

6° (**Fejer**) 假设函数 $f\in L[0,2\pi]$, 那么它的 Fourier 级数 (1)(以及级数 (2)) 在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处可用算术平均值求和而得函数 f (函数 $\bar{f}$) (参看 [180], pp.45—50).

推论 倘若函数 f 的 Fourier 级数在正测度集 E 上收敛, 那么它在 E 上几乎处处收敛于 f.

此由断语 2° 与 6° 可以立刻推出.

我们引入如次的定义:

$$\ln^+|a|=\begin{cases}\ln|a|, & |a|\geqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant|a|<1.\end{cases}$$

7° (**Riesz**) 假设函数 $f\in L[0,2\pi]$, 而且 $f(x)\geqslant 0$ 对于一切 x 都成立, 又 $\bar{f}\in L[0,2\pi]$, 那么 $f(x)\ln^+f(x)\in L[0,2\pi]$ (参看 [180], p.51).

最后, 我们给出 Fourier 级数的几种常用的判敛法, 并指出它们之间的蕴涵关系 (这里所谓的蕴涵关系 (1) ⇒ (3), 是指所考虑的函数, 如果它满足判敛法 (1) 的条件, 那么它也必满足判敛法 (3) 的条件). 当没有蕴涵关系时就给出反例. 我们要考虑的判敛法是

(1) (**Jordan 判敛法**) 如果在含有点 x 在内的某一区间上, f 是有界变差的, 那么 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (参看 [9], p.26).

(2) (**Dini 判敛法**) 令 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, 如果对某个数 $h>0,\varphi_x(t)/t\in L[0,h]$, 那么 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (参看 [180], p.21)

(3) (**de la Vallée Poussin 判敛法**) 令 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, 如果对某个数 $h>0$, 函数

$$\varPhi_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(u)du$$

①记号 $f(x)\simeq g(x)\ (x\to x_0)$ 表示 $\lim_{x\to x_0}f(x)/g(x)=1$.

在 $[0,h]$ 上有界变差, 且 $\lim_{t\to 0+}\Phi_x(t)=0$, 那么 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (参看 [180], p.33).

(4) (**Young 判敛法**) $\varphi_x(t)$ 及 $\Phi_x(t)$ 的定义如 (3), 若

(i) $\Phi_x(t)=o(1)\quad(t\to 0)$[①],

(ii) $\Psi_x(t)=\displaystyle\int_0^t|d(u\varphi_x(u))|=O(t)\quad(t\to 0+)$,

则 f 的 Fourier 级数在点 x 收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (参看 [9], pp.31—33).

关于判敛法 (1)—(4) 之间的关系是:

$$\begin{array}{ccc} (2) & \Rightarrow & (3) \\ & & \Uparrow \\ & & (1) \Rightarrow (4) \end{array}$$

1. Dini 判敛法和 Jordan 判敛法互不蕴涵.

第一例 Dini 判敛法失效但能用 Jordan 判敛法的 Fourier 级数.

下面的例子是由 Hardy [86] 作出的.

设

$$f(x)=\begin{cases}1/\ln(|x|/2\pi), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且在 $x=0$ 的某个邻域内, 它是有界变差的. 按 Jordan 判敛法知道, f 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛于 $f(0)=0$. 但在点 $x=0$ 处, 对于任一 $h>0$, 积分

$$\begin{aligned}\int_0^h\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|dt&=\int_0^h\frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}dt\\&=-\int_0^h\frac{2dt}{t\ln(|t|/2\pi)}=-\int_0^h\frac{2dt}{t\ln(t/2\pi)}\end{aligned}$$

是发散的, 不满足在点 $x=0$ 的 Dini 判敛法的条件.

第二例 Jordan 判敛法失效但能用 Dini 判敛法的 Fourier 级数.

下面的例子也是由 Hardy [86] 作出的.

设有偶函数 $f(x)$, 当 $0<x<\pi$ 时,$f(x)=\sqrt{x}\sin(1/x)$, 而当 $x=0$ 时, $f(x)=0$, 则

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t}=\frac{2}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t},$$

因而对某个数 $h>0,\varphi(t)/t\in L[0,h]$. 按 Dini 判敛法知道, f 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛于 $f(0)=0$. 另一方面, f 在 $x=0$ 的任何邻域内都不是有界变差的, 因而它不满足在点 $x=0$ 的 Jordan 判敛法的条件.

---

① 当 $g(x)>0$ 并且 $\lim_{x\to x_0}f(x)/g(x)=0$ 时, 我们简记为 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$. 当 $x\to x_0$ 时, 假如 $f(x)/g(x)$ 的绝对值小于一个常数, 那么就记为 $f(x)=O(|g(x)|)\ (x\to x_0)$.

2. Young 判敛法与 Dini 判敛法互不蕴涵.

第一例 Young 判敛法失效但能用 Dini 判敛法的 Fourier 级数.

设 f 是例 1 的第二例中的函数, 则 f 在 $x=0$ 处满足 Dini 条件. 另一方面, 在 $x=0$ 处, $\varphi_x(t)=2\sqrt{t}\sin(1/t)$, 所以

$$\begin{aligned}\Psi_x(t)&=\int_0^t|d(u\varphi_x(u))|=\int_0^t\left|3\sqrt{u}\sin\frac{1}{u}-2\frac{1}{\sqrt{u}}\cos\frac{1}{u}\right|du\\&\geqslant\frac{2}{\sqrt{t}}\int_0^t\left|\cos\frac{1}{u}\right|du-2t^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

由此可见, 当 $t\to 0+$ 时,$\Psi_x(t)\neq O(t)$. 因此, Young 判敛法中的条件 (ii) 并不成立.

第二例 Dini 判敛法失效但能用 Young 判敛法的 Fourier 级数.

例 1 的第一例中的函数具有所需的性质.

3. Young 判敛法与 de la Vallée Poussin 判敛法互不蕴涵.

第一例 de la Vallée Poussin 判敛法失效但能用 Young 判敛法的 Fourier 级数.

在 $(-\pi,\pi)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(t)=\begin{cases}\sin\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)\Big/\ln\dfrac{1}{t}, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ \sin\left(\ln\left(-\dfrac{1}{t}\right)\right)\Big/\ln\left(-\dfrac{1}{t}\right), & t<0,\end{cases}$$

于是, 在 $x=0$ 处,

$$\begin{aligned}\varphi_x(t)&=f(t)+f(-t)\\&=\begin{cases}2\sin\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)\Big/\ln\dfrac{1}{t}, & t>0,\\ 2\sin\left(\ln\left(-\dfrac{1}{t}\right)\right)\Big/\ln\left(-\dfrac{1}{t}\right), & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此,

$$\Phi_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi_x(u)du=o(1)\quad(t\to 0).$$

又当 $t\to 0+$ 时,

$$\int_0^t|d(u\varphi_x(u))|=2\int_0^t\left|\frac{\sin\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)}{\ln\dfrac{1}{u}}-\frac{\cos\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)}{\ln\dfrac{1}{u}}+\frac{\sin\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)}{\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)^2}\right|du=O(t).$$

故由 Young 判敛法可知, f 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛于 $f(0)=0$. 但是, 我

们可以证明对任意的正数 ε, 函数

$$\Psi(t)=\frac{2}{t}\int_0^t\frac{\sin\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)}{\ln\dfrac{1}{u}}du$$

在 $[0,\varepsilon]$ 上并非有界变差. 事实上,

$$\begin{aligned}\Psi(t)&=\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{\ln\dfrac{1}{u}}\cdot\frac{d}{du}\left\{u\left[\cos\left(\ln\frac{1}{u}\right)+\sin\left(\ln\frac{1}{u}\right)\right]\right\}du\\&=\frac{\cos\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)+\sin\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)}{\ln\dfrac{1}{t}}-\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\cos\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)+\sin\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)}{\left(\ln\dfrac{1}{u}\right)^2}du,\end{aligned}$$

末项是 $O((\ln\frac{1}{t})^{-2})(t\to 0)$. 因此,

$$\begin{aligned}\Psi'(t)&=2\frac{\varphi_x(t)-\Psi(t)}{t}\\&=2\frac{\sin\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)-\cos\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)}{2t\ln\dfrac{1}{t}}+O\left[\frac{1}{t(\ln t)^2}\right],\end{aligned}$$

末项属于 $L[0,\varepsilon]$, 我们要证积分

$$\int_0^{\varepsilon}\left|\frac{\sin\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)-\cos\left(\ln\dfrac{1}{t}\right)}{t\ln\dfrac{1}{t}}\right|dt=2\int_{\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\left|\frac{\sin v-\cos v}{v}\right|dv$$

是发散的. 实际上, 设 k 是一自然数, 则因

$$\int_{2k\pi-\frac{\pi}{4}}^{2k\pi}\frac{|\cos v-\sin v|}{v}dv>\frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}|\cos v-\sin v|dv>\frac{1}{8k},$$

关于 k 相加, 就知道

$$\int_{\ln\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{|\sin v-\cos v|}{v}dv=+\infty,$$

由是

$$\int_0^{\varepsilon}|\Psi'(t)|dt=+\infty,$$

即 $\Psi(t)$ 在 $[0,\varepsilon]$ 上不是有界变差的, 从而不满足 de la Vallée Poussin 判敛法的条件.

第二例 Young 判敛法失效但能用 de la Vallée Poussin 判敛法的 Fourier 级数.

例 2 的第一例中的函数满足 Dini 判敛法的条件, 从而也满足 de la Vallée Poussin 判敛法的条件, 但它并不满足 Young 判敛法的条件.

4. Jordan 判敛法失效但能用 de la Vallée Poussin 判敛法的 Fourier 级数.

例 1 的第二例中的函数具有所需的性质.

5. Jordan 判敛法失效但能用 Young 判敛法的 Fourier 级数.

例 3 中第一例中的函数具有所需的性质.

6. Dini 判敛法失效但能用 de la Vallée Poussin 判敛法的 Fourier 级数.

例 1 的第一例中的函数具有所需的性质.

7. 一个处处收敛的三角级数, 其和函数并不 (L) 可积.

考虑三角级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln x}.$$

容易证明, 此级数在每个实数 x 处都收敛. 令

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln x}.$$

现证 f 并不 (L) 可积. 事实上, 如果 f 是 (L) 可积的, 那么

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

是绝对连续的周期函数. 由于 f 是奇函数, 所以 F 是偶函数, 因而 F 的 Fourier 级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)dx$, 而当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}F(x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F'(x)\frac{\sin nx}{n}dx\\&=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{n}dx=-\frac{1}{n\ln n}^{①}.\end{aligned}$$

因为 F 是绝对连续函数, 所以它也是有界变差函数. 于是由 Jordan 判敛法可知, 其 Fourier 级数在每一点都收敛, 特别在点 $x=0$ 处收敛. 由此推知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}-(\frac{1}{n\ln n})$ 收敛. 然而如所周知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}-(\frac{n}{n\ln n})$ 是发散的. 这个矛盾表明了和函数 f 并不 (L) 可积.

8. 一个收敛的三角级数, 它不是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数.

从前例可知处处收敛的三角级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{\sin nx}{\ln n})$ 不是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数.

9. 一个三角级数, 它不是 Fourier-Lebesgue 级数, 但却是 Fourier-Stieltjes 级数.

考虑三角级数

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots,\tag{1}$$

---

①这里利用了一个相当深刻的关于三角级数的唯一性定理: "设一三角级数收敛于一个 (L) 可积函数, 则该三角级数即为该函数的 Fourier 级数".

显然, 它不可能是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数. 令

$$F(x)=\begin{cases}-\pi/2, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ \pi/2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

则 F 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界变差函数, 且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdF(x)=1,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdF(x)=0.$$

也就是说, 级数 (1) 的系数能用 Riemann-Stieltjes 积分表示. 因而级数 (1) 是 dF 的 Fourier-Stieltjes 级数.

注 这个例子表明 Fourier 级数的定义是依赖于所采用的积分定义的. 积分定义的任何限制或扩张都将导致 Fourier 级数类的相应改变.

10. 任给趋于零的正数序列 $\{\varepsilon_n\}$, 可构造连续函数 f, 使 f 的 Fourier 系数有以下关系: $|a_n|\geqslant\varepsilon_n$ 或 $|b_n|\geqslant\varepsilon_n$ 对无穷多个 n 成立.

第一例 因为 $\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$, 所以可取正整数序列 $\{n_k\}: n_1<n_2<\cdots$, 使得

$$\varepsilon_{n_1}+\varepsilon_{n_2}+\cdots<+\infty.$$

于是, 三角级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{n_k}\cos n_kx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于某个连续函数 $f(x)$, 而且

$$a_{n_k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n_kxdx=\varepsilon_{n_k}.$$

这个例子是由 Lebesgue [103] 作出的.

第二例 设 $n_1=2, n_{k+1}$ 是 n_k 的整数倍而大于 $(2n_k)^5$, 且设

$$\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{2\pi}{n_k}}\sin^4 n_{k+1}xdx>\frac{1}{5n_k},$$

$$\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}+\left|\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi}f(x)\sin n_{k+1}xdx\right|\leqslant\frac{1}{n_k^5}.$$

在区间 $(\pi/n_k, 2\pi/n_k)$ 上, 定义 $f(x)=n_k^{-3}\sin^3 n_{k+1}x$. 在这些区间的外面, $f(x)=0\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$; $f(x+2\pi)\equiv f(x)$. 因此, 当 n_k 已定时, $f(x)$ 在 $(\pi/n_{k-1},\pi)$ 上已经定好, 取 n_{k+1} 足够大, 可使上述不等式成立. 由是

$$\begin{aligned}\pi b_{n_{k+1}}&=\int_0^{2\pi}f(x)\sin n_{k+1}xdx\\&=\int_0^{\frac{2\pi}{n_{k+1}}}+\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{2\pi}{n_k}}+\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi}f(x)\sin n_{k+1}xdx\\&>-\frac{2\pi}{n_{k+1}}+\frac{1}{5n_k^4}-\frac{1}{n_k^5}+\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}>\sqrt{\varepsilon_{n_{k+1}}}.\end{aligned}$$

注 据 Riemann-Lebesgue 引理, (L) 可积函数的 Fourier-Lebesgue 系数必趋向于 0. 上述第二个反例特别证明了, 无论一个正数序列 $\{\varepsilon_n\}$ 怎样慢地收敛于零,

总有一个连续函数的 Fourier-Lebesgue 级数, 其系数有一个子列比 $\{\varepsilon_n\}$ 的相应子列收敛于零更慢.

11. 一个 (R) 可积函数, 其 Fourier-Riemann 系数并不趋向于零.

第一例 设

$$f(x)=\frac{d}{dx}(x^{\nu}\cos(1/x)),\quad 0<\nu<1/2.$$

易见, f 在 $[0,2\pi]$ 上是 (R) 可积的, 但它的 Fourier-Riemann 系数并不趋向于零.

这个例子属于 Riemann [135].

第二例 考虑级数

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\alpha}n^{\beta}e^{inx},\quad 0<\alpha<1,\ 0<\beta<\alpha/2.$$

它的实部和虚部分别是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\beta}\cos n^{\alpha}\cos nx-n^{\beta}\sin n^{\alpha}\sin nx) \tag{1}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\beta}\sin n^{\alpha}\cos nx+n^{\beta}\cos n^{\alpha}\sin nx). \tag{2}$$

可以证明, 级数 (1) 和 (2) 都是 Fourier-Riemann 级数, 然而它们的系数并不趋向于零.

这个例子属于 Hardy [84].

注 由 Riemann-Lebesgue 引理可知, Fourier-Lebesgue 系数必定趋向于零. 上述反例说明了对于 Fourier-Riemann 系数, 相应的命题并不成立. 但是, 如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 (R) 可积和绝对可积, 那么便有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0$$

(参看 [7], pp.736—737). 因此, 上述反例也说明了在这个命题中, f 在 $[a,b]$ 上 (R) 绝对可积的条件不可去掉.

12. 任给数列 $\{\lambda_n\},\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty,\lambda_n=o(n)$, 可构造 (R) 可积函数 f, 它的 Fourier-Riemann 系数 $b_n>\lambda_n$ 对无穷多个 n 成立.

下面的构造法属于 Titchmarsh [168]. 构造这个例子时要用到如次的断语:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sin^2 nx=\frac{b-a}{2}.$$

现在着手构造所需的例子. 令 $\lambda_n=\varepsilon_n n$, 据条件, $\varepsilon_n\to 0\ (n\to\infty)$. 我们要构造一个两两不相交的区间序列 $I_k=(\alpha_k/2,\alpha_k),\ k=1,2,\cdots$, 并令

$$f(x)=\begin{cases}c_k\sin n_k x, & x\in I_k,\\ 0, & x\in[-\pi,\pi]\diagdown I_k,\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots,$$

这里, 正系数 c_k 和正整数 $n_1 < n_2 < \cdots$ 要求满足如次的一组关系:

$$n_k\alpha_k \text{ 都是 } 4\pi \text{ 的整数倍.} \tag{1}$$

这样一来, f 在 $x \neq 0$ 处是连续的, 且 f 在 I_k 上的 (R) 积分值为 0.

$$c_k/n_k = 1/k \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{2}$$

条件 (2) 蕴涵了函数 f 在 $(0, \pi)$ 上是 (R) 可积的.

我们用归纳法来作出 $\{n_k\}, \{c_k\}, \{I_k\}$ 和 $\{\alpha_k\}$. 为此, 令 $n_1 = 4, c_1 = 4, \alpha_1 = \pi, I_1 = (\pi/2, \pi)$. 假定已经定义了 n_i, c_i, I_i $(i = 1, 2, \cdots, k-1)$, 那么对 $\alpha_{k-1}/2 \leqslant x \leqslant \pi$, 函数 f 也就定义妥帖. 再令 $\alpha_k = 4\pi/p$, 其中 p 是适合不等式

$$\alpha_k \leqslant 1/n_{k-1} \tag{3}$$

的最小的正整数. 注意, 此时也有

$$\alpha_k \geqslant 1/2n_{k-1}. \tag{3_1}$$

设 n_k 是能被 p 整除的这样大的正整数, 使得同时满足下面的条件:

$$\int_{\frac{\alpha_k}{2}}^{\alpha_k} \sin^2 n_k x dx > \frac{\alpha_k}{8}. \tag{4}$$

$$\left| \int_{\alpha_k}^{\pi} f(x) \sin n_k x dx \right| \leqslant 1. \tag{5}$$

$$4\varepsilon_{n_k} < 1/(16kn_{k-1}). \tag{6}$$

为了估计 $f(x)\sin n_k x$ 在 $(0, \pi)$ 上的积分值, 我们考虑 $f(x)\sin n_k x$ 在 $(0, \alpha_{k+1})$, $(\alpha_k/2, \alpha_k), (\alpha_k, \pi)$ 上的积分并分别表示为 A_k, B_k 和 C_k. 据条件 (5), $|C_k| \leqslant 1$. 由条件 (3) 可知, $\sin n_k x$ 在 $(0, \alpha_{k+1})$ 上是单调的, 故由积分第二中值定理得到 $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$. 由条件 (4), (2), (3_1) 和 (6), 我们还得到

$$\begin{aligned} B_k &> c_k\alpha_k/8 = n_k\alpha_k/(8k) \geqslant n_k/(16kn_{k-1}) \\ &> 4\varepsilon_{n_k} n_k = 4\lambda_{n_k}. \end{aligned}$$

于是就有

$$\pi b_{n_k} = A_k + B_k + C_k > 4\lambda_{n_k} - 1 - o(1).$$

即, $b_n > \lambda_n$ 对无穷多个 n 成立.

注 例 12 是例 11 的改进.

13. 一个连续函数 f, 使对任何 $\varepsilon > 0$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$ 发散, 其中 a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数.

容易证明, 如果 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

必定收敛. 应当注意, 即使 f 在 $[0, 2\pi]$ 上连续, 也不能把这一结论加强为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$$

收敛, 其中 $\varepsilon > 0$. 例如, 考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{icn\ln n}}{n^{1/2}(\ln n)^{\beta}} z^n, \quad z = e^{ix}, \tag{1}$$

其中 $\beta > 1$, c 为非零实数. 这个级数在 $[0, 2\pi]$ 上是一致收敛的 (参看 [180], p.119). 设 f 是级数 (1) 的实部或虚部, 为确定起见, 我们就设 f 是级数 (1) 的实部:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{\beta}} (\cos(cn\ln n)\cos nx - \sin(cn\ln n)\sin nx). \tag{2}$$

由于级数 (2) 在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛于 f, 因而 f 是 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数, 且其 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{\cos(cn\ln n)}{n^{1/2}(\ln n)^{\beta}}, \quad b_n = -\frac{\sin(cn\ln n)}{n^{1/2}(\ln n)^{\beta}}.$$

因此

$$\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{n(\ln n)^{2\beta}}, \quad \rho_n^{2-\varepsilon} = \frac{1}{n^{1-\varepsilon/2}(\ln n)^{\beta(2-\varepsilon)}}.$$

注意, 当 n 充分大后, 有

$$1/(n\ln n) \leqslant 1/[n^{1-\varepsilon/2}(\ln n)^{\beta(2-\varepsilon)}],$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\ln n) = +\infty$, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n^{2-\varepsilon} = +\infty$. 由此可知, $\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon}) = +\infty$.

具有这种性质的连续函数的第一个例子是由 Carleman [54] 构造出来的.

14. $H^{\alpha}[0, 2\pi]$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 中的一个函数 f, 使级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta})$ 发散, 其中 $\beta = 2/(2\alpha + 1)$.

下面的例子是由 Szàsz [162] 作出的.

(i) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\ln n}}{n^{1/2+\alpha}} e^{inx}. \tag{1}$$

级数 (1) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛于某个函数 $\varphi_{\alpha} \in H^{\alpha}[0, 2\pi]$ (参看 [180], pp.116—119). 设 f 是级数 (1) 的实部或虚部, 为确定起见, 我们就设 f 是级数 (1) 的实部:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+\alpha}} (\cos(n\ln n)\cos nx - \sin(n\ln n)\sin nx).$$

于是, f 的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{\cos(n\ln n)}{n^{1/2+\alpha}}, \quad b_n = -\frac{\sin(n\ln n)}{n^{1/2+\alpha}}.$$

又

$$\rho_n^{\alpha} = a_n^2 + b_n^2 = 1/n^{1+2\alpha}, \quad \rho_n^{\beta} = \rho_n^{2/(2\alpha+1)} = 1/n.$$

因而 $\sum_{n=2}^{\infty} \rho_n^{\beta} = +\infty$, 即级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|^{\beta} + |b_n|^{\beta}) = +\infty$.

(ii) 当 $\alpha = 1$ 时, 考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\ln n}}{(n\ln n)^{3/2}} e^{inx}. \tag{2}$$

级数 (2) 的实部和虚部在 $[0, 2\pi]$ 上都一致收敛, 且其和函数都属于 $H^1[0, 2\pi]$, 又, 它们的 Fourier 系数适合等式:

$$\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 1/(n \ln n)^3,$$

从而

$$\rho_n^\beta = \rho_n^{2/3} = 1/n \ln n.$$

因此, 级数 $\sum_{n=2}^\infty \rho_n^\beta$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=2}^\infty (|a_n|^\beta + |b_n|^\beta)$ 也发散.

注 Szàsz [92] 曾证明, 若 $f \in H^\alpha[0, 2\pi]$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, 则对每一 $\beta > 2/(2\alpha+1)$, 级数

$$\sum_{n=1}^\infty (|a_n|^\beta + |b_n|^\beta)$$

收敛. 上述反例说明了当 $\beta = 2/(2\alpha + 1)$ 时, 这个命题不再成立.

15. $H^{\frac{1}{2}}[0, 2\pi]$ 中的一个函数, 其 Fourier 级数并不绝对收敛.

Bernstein [41][42] 曾证明, 若 $f \in H^\alpha[0, 2\pi]$, 且 $\alpha > \frac{1}{2}$, 则 f 的 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上绝对收敛, 应当注意, 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 这个命题不再成立. 例如, 设函数 f 是级数

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{e^{in \ln n}}{n} e^{inx}$$

的实部 (取虚部亦可):

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n} (\cos(n \ln n) \cos nx - \sin(n \ln n) \sin nx). \tag{1}$$

级数 (1) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛于 f, 且 $f \in H^{\frac{1}{2}}[0, 2\pi]$ (参看 [180], pp.116—119). 因此, f 的 Fourier 系数为

$$a_n = \cos(n \ln n)/n, \quad b_n = -\sin(n \ln n)/n.$$

由于级数

$$\sum_{n=2}^\infty \rho_n = \sum_{n=2}^\infty \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}$$

发散, 因而级数 $\sum_{n=2}^\infty (|a_n| + |b_n|)$ 也发散. 由此可知, f 的 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上并不绝对收敛.

16. 一个三角级数, 它在某个可数集上收敛, 但其系数并不趋向于零.

设

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty \sin(n! x),$$

则当 x 是 π 的任何有理数的倍数时, $T(x)$ 都是收敛的. 但是, 其系数并不趋向于零.

注 若三角级数 $T(x)$ 在一个正测度集上收敛, 则 $T(x)$ 的系数必定趋向于零 (参看 [88], 中译本 p.105). 上述反例说明了在这个命题中, 收敛点集的测度大于零的条件不可去掉.

17. 系数趋于零而又处处发散的三角级数.

远在 1906 年时, Fatou [71] 便提出这样一个问题: 是否有如此的三角级数存在, 它的系数趋向于零, 而它本身在一个具有正测度的集合 E 上发散? 1911 年时, Лузин [26] 给出了这个问题的肯定答案. 他构造了一个在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处发散的三角级数, 而它的系数却趋向于零. 1912 年时, Steinhaus [159] 又作出了一个处处发散的三角级数, 它的系数趋向于零. 下面的例子也是属于 Steinhaus [160] 的.

三角级数

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k(x - \ln\ln k)}{\ln k} \tag{1}$$

的系数显然趋向于零. 兹证对每一 x. 级数 (1) 发散. 令

$$l_k = [\ln k], \quad v_k = \ln\ln k, \quad I_k = (v_k, v_{k+1}),$$

$$G_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} \frac{\cos k(x - v_k)}{\ln k}, \quad G_n = \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} \frac{1}{\ln k}.$$

因为 $G_n \geqslant \ln n / \ln(n + \ln n) \to 1\ (n \to \infty)$, 所以存在正整数 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$G_n > 0.9.$$

再由不等式 $|\sin u| \leqslant |u|$ 得到

$$\begin{aligned}
0 \leqslant G_n - G_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} \frac{1 - \cos k(x - v_k)}{\ln k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} \frac{2}{\ln k} \sin^2 \frac{k(x - v_k)}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{2\ln n} \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} k^2 (x - v_k)^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

若 $n < k \leqslant n + \ln n$, 则 $v_n < v_k \leqslant u_{n+\ln n}$. 因此, 当 $x \in (v_n, v_{n+1})\ (n \geqslant 3)$ 时, 就有

$$|x - v_k| \leqslant v_{n+\ln n} - v_n.$$

应用微分中值定理, 得到

$$|x - v_k| \leqslant \ln n / (n \ln n) = 1/n.$$

因之, 存在正整数 n_1, 当 $n \geqslant n_1$ 时,

$$\frac{1}{2\ln n} \sum_{k=n+1}^{n+\ln n} k^2 (x - v_k)^2 \leqslant \frac{(n + \ln n)^2 \ln n}{2n^2 \ln n} < 0.6.$$

于是由 (2) 可知, 当 $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ 时,

$$G_n(x) = G_n - (G_n - G_n(x)) > 0.9 - 0.6 = 0.3.$$

因为每一点 $x \pmod{2\pi}$ 属于无穷多个区间 I_n, 所以级数 (1) 对每一点 x 都发散.

18. $H^\alpha[0, 2\pi]$ $(0 < \alpha < 1)$ **中的一个函数, 其 Fourier 系数** $c_n \neq o(n^{-\alpha})$.

Lebesgue [103] 曾证明: 假如 $f(x + 2\pi) \equiv f(x), f \in H^\alpha[0, 2\pi]$ $(0 < \alpha < 1)$, 那么 f 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 都是 $O(n^{-\alpha})$. 应当注意, 我们不能把 $O(n^{-\alpha})$ 加强成为 $o(n^{-\alpha})$. 例如, 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n x,$$

其中 $0 < a < 1$, b 为正整数且 $ab > 1$, 则 $f \in H^\alpha[0, 2\pi]$, 这里 $\alpha = \ln \frac{1}{a} / \ln b < 1$ (参看第三章例 36). 由等式 $\alpha = \ln \frac{1}{a} / \ln b$ 得到 $a^n = (b^n)^{-\alpha}$. 设 f 的 Fourier 系数为 c_n, 则 c_k $(k = b^n)$ 适合等式

$$\frac{c_k}{k^{-\alpha}} = \frac{a^n}{k^{-\alpha}} = \frac{(b^n)^{-\alpha}}{(b^n)^{-\alpha}} = 1,$$

因此, $c_n \neq o(n^{-\alpha})$.

这个例子是由 Hardy [85] 作出的.

19. 一个连续的有界变差函数, 其 Fourier 系数不等于 $o(1/n)$.

第一例 第一个具有所需性质的函数是由 Riesz [136] 作出的. 他所构造的例子如下:

设

$$p(t) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \cos 4^j t).$$

因为 $\cos 4^m t$ 可表成 $\cos t$ 的 4^m 阶多项式, 所以乘积

$$p_m(t) = (1 + \cos 4t) \cdots (1 + \cos 4^m t)$$

是一个不取负值的关于 $\cos t$ 的多项式, 它的阶数是

$$\alpha_m = 4^m + 4^{m-1} + \cdots + 4$$

由于多项式 $p_{m+1}(t) - p_m(t) = p_m \cos 4^{m+1} t$ 的最低项的阶数是

$$\beta_{m+1} = 4^{m+1} - 4^m - \cdots - 4 > \alpha_m,$$

因而若令

$$p(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{1}$$

那么, 它的部分和 $s_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ 满足关系式 $s_{\alpha_m}(t) = p_m(t)$. 令

$$P_m(x) = \int_0^x p_m(t) dt,$$

并令 γ_m 是三角多项式 $p_m(t)$ 中非零项的数目. 例如, $p_1(t) = 1 + \cos 4t$, 所以 $\gamma_1 = 2$; 而

$$\begin{aligned} p_2(t) &= (1 + \cos 4t)(1 + \cos 16t) \\ &= 1 + \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 12t + \cos 16t + \frac{1}{2}\cos 20t, \end{aligned}$$

所以 $\gamma_2 = 5$; 等等. 不难看出, $\gamma_{m+1} = 3\gamma_m - 1$, 因而

$$\gamma_{m+1} - \gamma_m = 3(\gamma_m - \gamma_{m-1}), \quad \gamma_{m+1} - \gamma_m = 3^m.$$

由于 $p_{m+1}(t) - p_m(t)$ 是由 3^m 项组成而每一项的绝对值都不超过 1, 因而

$$|P_{m+1}(x) - P_m(x)| \leqslant 3^m/\beta_{m+1} = O(3^m/4^m).$$

由此可知,

$$P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) + \cdots = \lim_{m\to\infty} P_m(x) = P(x)$$

在区间 $[0, 2\pi]$ 上一致地成立, 从而 $P(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的一个连续函数. 因为 $p_m(t)$ 是非负函数, 所以 $P_m(x)$ 是一个不减函数, 从而 $P(x)$ 也是一个不减函数, 令

$$F(x) = -x + P(x),$$

则 $F(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的一个连续的有界变差函数. 设 F 的 Fourier 系数为 c_n, 则因 $a_4^m = 1$, 故由 (1) 得知, $c_4^m = a_4^m/4^m = 1/4^m$, 即 $4^m c_4^m = 1$. 这意味着 $c_n \neq o(1/n)$.

第二例 下面的例子是由 Hille 和 Tamarkin [93] 作出的.

我们用 I_{11}; I_{21}; I_{22}; I_{31}; $I_{32}, \cdots$ 表示区间 $[0, 2\pi]$ 中 Cantor 三分集的邻接区间: I_{11} 是 $(2\pi/3, 4\pi/3)$, 即三等分集中间一个区间; I_{21}, I_{22} 是剩下来的区间 $[0, 2\pi/3]$ 和 $[4\pi/3, 2\pi]$ 的三等分的中间一个区间; 等等. 我们定义函数 $\varphi(x)$ 使在 I_{11} 上为 $1/2$; 在 I_{21}, I_{22} 上分别为 $1/4, 3/4$. 在 $I_{31}, I_{32}, \cdots$ 上分别为 $1/8, 3/8, \cdots$; 等等. 这样, $\varphi(x)$ 除了在 Cantor 集上的 x 而外对一切 x 全有定义, 在 Cantor 集上根据连续性来定义. 于是, $\varphi(x)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的一个连续的有界变差函数. 假设当 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时 $f(x) = \varphi(x) - x/2\pi$, 又设 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f(x)$ 是一个连续的有界变差的周期函数. 若 $n > 0$, 则

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\varphi(x) - \frac{x}{2\pi}\right\} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2n\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-inx} d\varphi(x) = \frac{p_n}{2n\pi i}. \end{aligned}$$

假如我们能够证明 p_n 不趋向于 o, 那么也就证明了 $c_n \neq o(|n|^{-1})$.

取 $n = 3^m$; 则因 φ 在 $(2\pi/3, 4\pi/3)$ 中为常数, 在剩下来的两个区间中有同样的变化, 所以

$$p_{3^m} = \int_0^{2\pi} e^{-i3^m x} d\varphi(x) = 2\int_0^{\frac{2}{3}\pi} e^{-i3^m x} d\varphi(x). \tag{1}$$

又因 $\varphi(x/3) = \varphi(x)/2$, 所以

$$2\int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\varphi\left(\frac{1}{3}x\right) = \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\varphi(x) = p_{3^{m-1}}.$$

从而推得 $p_{3^m}=p_1$, 所以只要证明 $p_1\neq 0$ 就够了. 但 $\varphi(x)$ 在 $(2\pi/9,4\pi/9)$ 内为常数, 故若命 p_1 的实部为 A, 则由 (1) 可得

$$A=2\left(\int_0^{\frac{2}{9}\pi}+\int_{\frac{4}{9}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\right)\cos x d\varphi(x)$$

$$=2\int_0^{\frac{2}{9}\pi}\left\{\cos x+\cos\left(x+\frac{4}{9}\pi\right)\right\}d\varphi(x),$$

又

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{4}{9}\pi\right)=2\cos\left(x+\frac{2}{9}\pi\right)\cos\frac{2}{9}\pi\geqslant 2\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi,$$

所以

$$A\geqslant 4\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi\int_0^{\frac{2}{9}\pi}d\varphi(x)=\cos\frac{2}{9}\pi\cos\frac{4}{9}\pi>0.$$

注 若 f 为绝对连续函数, 则 $c_n=o(|n|^{-1})$ (参看 [88], 中译本 p.30). 上述反例说明了在这个命题中, 不能把 f 为绝对连续的条件减弱为连续的有界变差函数.

20. 一个余弦级数, 其系数单调递减且趋向于零, 但其和函数并不 (L) 可积.

下面的例子是由 Szidon [164] 作出的.

设 $\{\lambda_n\}$ 是整数序列:

$$0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots.$$

当 k 适合 $\lambda_n<k\leqslant\lambda_{n+1}$ 时, 各个 a_k 彼此都是相同的, 即 $a_{\lambda_n+1}=a_{\lambda_n+2}=\cdots=a_{\lambda_{n+1}}$. 设

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

并令 $\Delta a_n=a_n-a_{n+1}$, 于是应用 Abel 变换, 得到

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k D_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n D_{\lambda_n}(x),\tag{1}$$

这里, $\alpha_n=\Delta a_{\lambda_n}, D_k(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos kx$. 因为

$$L_n=\int_0^{\pi}|D_n(x)|dx\simeq(4/\pi^2)\ln n\tag{2}$$

(参看本章的引言), 所以

$$L_n=\int_0^{\pi}|D_n(x)|dx\leqslant C_1\ln n,\quad n=2,3,\cdots,\tag{3}$$

其中 C_1 是正数. 容易看出, $|D_n(x)|\leqslant\frac{1}{2}+n$, 所以

$$\int_0^{\frac{1}{n}}|D_n(x)|dx=O(1).$$

于是由 (2) 得到

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|D_n(x)|dx>C\ln n,\tag{4}$$

其中 C 是正数. 函数 $\sin t/t$ 在 $(0,\pi/2]$ 上是递减的, 因而 $\sin t \geqslant 2t/\pi$ $(0 < t \leqslant \pi/2)$. 所以当 $0 < x \leqslant \pi$ 时,

$$|D_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x} < \frac{2}{x}.$$

于是由 (1),(3),(4) 得到

$$\int_{\frac{1}{\lambda_\nu}}^{\pi} |f(x)|dx \geqslant C\alpha_\nu \ln\lambda_\nu - C_1\sum_{n=1}^{\nu-1}\alpha_n \ln\lambda_n - 2\ln(\pi\lambda_\nu)\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\alpha_n. \tag{5}$$

用 I_ν 代表不等式 (5) 的右端, 则

$$\lim_{\nu\to\infty} I_\nu/\nu! = C\ln 2 > 0.$$

因此, f 在 $[0,\pi]$ 上并不 (L) 可积.

注 Young [175] 和 Колмогоров [22] 曾经证明: 若 $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1} \geqslant 0$, 则级数

$$\frac{1}{\alpha}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{6}$$

除 $x=0$ 外收敛于某个 (L) 可积函数 $f(x)$, 而且 (6) 就是 $f(x)$ 的 Fourier 级数. 上述反例表明了在这个命题中, 不能把 $\Delta^2 a_n \geqslant 0$ 代以 $\Delta a_n \geqslant 0$.

21. 一个有界变差函数, 其 Fourier 级数并不绝对收敛.

由 Jordan 判敛法可知, 有界变差函数的 Fourier 级数必定收敛. Zygmund [179] 曾证明: 若有界变差函数 $f \in H^\alpha[0,2\pi]$ $(\alpha > 0)$, 则 f 的 Fourier 级数必定绝对收敛. 然而, 有界变差函数的 Fourier 级数未必绝对收敛. 例如, 我们在 $[0,2\pi)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

而在其他地方由周期性来定义. 于是, f 是区间 $[0,2\pi)$ 上的有界变差函数. 易见, 它还是一个奇函数, 因而 $a_n = 0$. 而当 $n > 0$ 时, 由分部积分得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx = \frac{1}{n},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 即 f 的 Fourier 级数不绝对收敛.

22. 一个 (L) 可积函数 f, 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ 发散, 其中 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$.

三角级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$$

是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数, 此函数的 Fourier 系数是 $a_n = 1/\ln n$, 而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

是发散的.

注 我们有如下的命题 (参看 [180], p.28): 如果 $f \in L[-\pi,\pi]$, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n$ 必定收敛, 其中

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

上述反例说明了它的对偶命题并不成立.

23*. 一个以 2π 为周期的连续函数, 其 Fourier 级数仅仅在 $x = 0 \pmod{2\pi}$ 这些点发散, 而在 $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ 各点收敛.

有界变差函数 f 的 Fourier 级数必定处处收敛, 但是 f 可能有不连续点, 所以函数的连续性, 并非是 Fourier 级数收敛的必要性. 那么 f 的 Fourier 级数在 f 的连续点是否一定收敛呢? 早在 1876 年, Du Bois Reymond 已经对这个问题作了否定的答复, 他作出了一个连续函数的例子, 其 Fourier 级数在某些点发散. 此处构造的相当简单的例子是由 Féjer [72] 提出的.

考虑三角多项式

$$\begin{aligned} T(x,n) &= \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(n+n-1)x}{1} \\ &\quad - \frac{\cos(n+n+1)x}{1} - \cdots - \frac{\cos(n+2n)x}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} \\ &= 2\sin 2nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}. \end{aligned}$$

我们易于证明, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx/k$ 是函数 $\varphi(x) = (\pi - x)/2$ 的 Fourier 级数, 其中 $x \in [0, 2\pi)$. 因为 φ 在 $[0, 2\pi)$ 上是有界变差的函数, 所以它的 Fourier 级数的部分和关于 n 与 x 是一致有界的 (参看 [180], p.47). 因此,

$$|T(x,n)| \leqslant C, \tag{1}$$

其中 C 是常数, 设

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} T(x, 2^{p^3}) \tag{2}$$

由 (1) 及 Weierstrass 定理可知, 函数 f 在 $[0, 2\pi)$ 上是连续的. 因为 $3 \cdot 2^{p^3} = 2^{p^3} + 2 \cdot 2^{p^3} < 2^{(p+1)^3} (p = 1, 2, \cdots)$, 所以对于两个不同的三角多项式 $T(x, 2^{p^3})$ 与 $T(x, 2^{q^3})$ $(p \neq q)$, 它们不包含具有 x 的相同倍数的项. 此外, 倘若 $\cos kx$ 包含在多

项式 $T(x,2^{p^3})$ 中, 而 $\cos mx$ 包含在 $T(x,2^{q^3})$ 中, 则当 $p<q$ 时即有 $k<m$. 因此, 由 (1) 与 (2) 可知, 函数 f 的 Fourier 级数可由级数 (2) 得出, 只要把 (2) 中的每个 T 展开并按照余弦的号码用递增的次序排列即可. 于是

$$S_{2\cdot 2^{q^3}}(0,f)=\frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{2^{q^3}}\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{q^2}\ln 2^{q^3}=q\ln 2,$$

因而 $\overline{\lim}_{k\to\infty}|S_k(0,f)|=+\infty$; 这就是说, 函数 f 的 Fourier 级数在 0 这点是无界发散的.

兹设 $0<x_0<2\pi$, 而证明 f 的 Fourier 级数在 x_0 这点收敛. 事实上, 利用 Abel 变换易于推出

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos(n+k)x_0}{n-k}\right|\leqslant A(x_0)\quad(p<n),\tag{3}$$

其中 $A(x_0)$ 是仅仅与 x_0 有关的有限数. 仿此,

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos(2n+k)x_0}{k}\right|\leqslant B(x_0)\quad(p\leqslant n).\tag{4}$$

由 (2),(3) 与 (4) 即知, 函数 f 的 Fourier 级数在 x_0 这点收敛, 而这就是所要证明的.

注 还可构造这样的连续函数, 它的 Fourier 级数在具有连续统的势的集上发散 (参看 [180], p.170). 然而, 关于连续函数的 Fourier 级数能否在正测度集上发散的问题, 一直到 1966 年并没有解决. 甚至还不知道, 任何连续函数的 Fourier 级数是否至少能在一点收敛. 1966 年, Carleson [55] 证明了 L^2 可积函数的 Fourier 级数几乎处处收敛, 就蕴涵连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛.

24*. $L[0,2\pi]$ 中的一个函数 f, 其 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处无界发散.

1912 年, Steinhaus 作出了一个处处发散的三角级数, 它的系数趋向于零. 于是, 便自然提出这样的问题: 是否存在函数 $f\in L[0,2\pi]$, 它的 Fourier 级数在某个正测度集上发散! 1923 年, Колмогоров [24] 给出了这个问题的肯定答案. 他作出了一个函数 $f\in L[0,2\pi]$, 它的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处无界发散. 在构造 Колмогоров 的例子以前, 我们先证明如次的断语.

引理 对于每个正整数 n 而言, 都可以作出如此的函数 $\varphi_n(x)$ 与集合 $E_n\subset[0,2\pi]$, 以及如此的数 M_n,q_n, 使得下列条件成立:

(i) $\varphi_n(x)\geqslant 0,\int_0^{2\pi}\varphi_n(x)dx=2$,

(ii) φ_n 在 $[0,2\pi]$ 上是有界变差的函数,

(iii) $\lim_{n\to\infty}mE_n=2\pi,\lim_{n\to\infty}M_n=\infty$,

(iv) 对于任意一点 $x_0\in E_n$ 都可以找出如此的标号 $p_{n,x_0}\leqslant q_n$, 使

$$|S_{p_{n,x_0}}(x_0,\varphi_n)|\geqslant M_n.$$

证 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上选取 n 个点 $A_k=4k\pi/(2n+1), k=1,2,\cdots,n$. 假设 $\lambda_1=1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是一列奇整数, 以后对于它们还要添上一些补充的假设. 再定义一列数 $\{m_k\}$ 与闭区间 $\{J_k\}$ 如下:

$$2m_k+1=\lambda_k(2n+1),\quad J_k=\left[A_k-\frac{1}{m_k^2},A_k+\frac{1}{m_k^2}\right],\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

然后作函数

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} m_k^2/n, & x\in J_k,\\ 0, & x\in[0,2\pi]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}J_k. \end{cases} \tag{2}$$

现在我们要证明, φ_n 就是所要的函数 (当然, 要用适当的方式选择 m_k).

由 (1) 与 (2) 可知, 函数 φ_n 是满足引理的条件 (i) 与 (ii) 的.

作闭区间 $\Delta_i=[A_i+\frac{2}{n^2},A_{i+1}-\frac{2}{n^2}], i=1,2,\cdots,n-1$. 则闭区间 $\{\Delta_i\}$ 与 $\{J_k\}$ 显然互不相交. 兹设 $m_1,m_2,\cdots,m_{k-1}$ 各数已经确定. 由 Riemann-Lebesgue 引理可知, 我们能够选取 m_k 如此大, 使得对于一切 $x\in\Delta_{k-1}$ 而言, 都有

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\bigcup_{i=1}^{k-1}J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\left(m_k+\dfrac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(t-x)}dt\right|\leqslant 1, \tag{3}$$

理由如下: 当 $x\in\Delta_{k-1}$ 而 $t\in\cup_{i=1}^{k-1}J_i$ 时, 距离 $|t-x|\geqslant\rho>0$, 其中 ρ 是仅仅与 n 有关的常数. 这样, 数列 $\{m_i\}$ 便可以用归纳法来决定.

因为 Dirichlet 的核是 $D_k(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos kt$, 所以

$$|D_k'(t)|\leqslant k^2,\quad t\in[0,2\pi]. \tag{4}$$

其次, 当 $i\geqslant k$ 而 $x\in\Delta_{k-1}$ 时, 显然有

$$\frac{2m_k+1}{2}(A_i-A_k)=(i-k)2\pi\lambda_k, \tag{5}$$

$$0<A_i-x\leqslant A_i-A_{k-1}=(i-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}. \tag{6}$$

根据 (4)—(6) 与 Lagrange 定理可知, 当 $i\geqslant k$ 而 $x\in\Delta_{k-1}$ 时, 即有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(t-x)}dt\right|\\ =&\left|\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\frac{m_i^2}{n}\frac{\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(A_i-x)}dt\right.\\ &\left.+\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\frac{m_i^2}{n}\left[\frac{\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(t-x)}-\frac{\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(A_i-x)}\right]dt\right|\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{n\pi}\frac{\left|\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(A_i-x)\right|}{\sin\dfrac{1}{2}(A_i-x)}-\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\frac{m_i^2}{n}m_k^2\frac{1}{m_i^2}dt$$

$$\geqslant \frac{\left|\sin\left(m_k+\dfrac{1}{2}\right)x\right|}{n\pi\sin\dfrac{1}{2}(A_i-x)}-\frac{2}{n\pi}\geqslant\frac{1}{\pi^2}\frac{\left|\sin\left(m_k+\dfrac{1}{2}\right)x\right|}{i-k+1}-\frac{1}{n}. \tag{7}$$

我们要指出, 积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\dfrac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(t-x)}dt$$

具有同样的符号, 这种符号是与 $i\geqslant k$ 无关的.

将 (2), (3) 与 (7) 合并即知, 当 $x\in\Delta_{k-1}$ 时 $(k=2,3,\cdots,n)$:

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\frac{\sin\left(m_k+\dfrac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(t-x)}dt\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}J_i}+\int_{\bigcup\limits_{i=k}^{n}J_i}\right|\geqslant\frac{\left|\sin\left(m_k+\dfrac{1}{2}\right)x\right|}{\pi^2}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i-k+1}-\frac{n}{n}-1$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{i}-2. \tag{8}$$

由 (8) 可得: 当 $x\in\Delta_{k-1}$ 且 $2\leqslant k\leqslant n-[\sqrt{n}]$ 时, 有

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqslant\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\ln x-2. \tag{9}$$

兹设 σ_{k-1} 为一切如此的点 $x\in\Delta_{k-1}$ 的集, 使

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{10}$$

则当 $x\in\sigma_{k-1}$ 时, 显然有

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqslant\sqrt{\ln n}-2,\quad k=2,\cdots,n-[\sqrt{n}]. \tag{11}$$

令

$$q_n=m_n,\quad E_n=\bigcup_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\sigma_i,\quad M_n=\sqrt{\ln n}-2, \tag{12}$$

则由 (11) 可知, 倘若能够证明 $\lim_{n\to\infty}mE_n=2\pi$, 那么引理便证明了.

首先, 闭区间 Δ_{k-1} 的长度是 $4\pi/(2n+1)-4/n^2$. 又我们易于看出, 条件 (10) 在 Δ_{k-1} 上除了一个测度为 $O(1/n\sqrt{\ln n})$ 的集而外都成立. 事实上, 考虑满足不等式

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\ln n}}$$

的点 x, 则一切此种点所成之集必定是若干个闭区间之并, 而在每个这种闭区间内至少有函数 $y=\sin(m_k+\frac{1}{2}x)=\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ 的一个零点. 又这些闭区间的长度显然都相等. 假设 γ 是这个公共长度, 则不难看出,

$$\gamma=2\frac{\arcsin\dfrac{2\pi}{\sqrt{\ln n}}}{\lambda_k(2n+1)\dfrac{1}{2}}=O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\ln n}}\right).$$

函数 $y=\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上具有 $\lambda_k(2n+1)+1$ 个零点. 而相邻两个零点之间的距离是 $2\pi/[\lambda_k(2n+1)]$. 但当 $k\geqslant 2$ 时 $\lambda_k>n$, 而 Δ_{k-1} 的长度等于 $4\pi/(2n+1)-1/n^2$, 所以函数 $\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ 在闭区间 Δ_{k-1} 上至多有 $N=O(\lambda_k)$ 个零点. 因此, 一切满足条件

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|<\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\quad(k\geqslant 2)$$

的点 $x\in\Delta_{k-1}$ 所成之集便具有测度

$$\gamma N=O(1/n\sqrt{\ln n}).$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}mE_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\left[\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}-O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right]=2\pi.$$

引理证完.

现在我们着手构造所需的例子.

因为 $M_n\to\infty$ (参看引理), 所以可用归纳法作出一个递增的数列 $\{n_k\}$, 使

1° 当 $i=1,2,\cdots,k-1$ 时, $q_{n_i}\leqslant\sqrt{M_{n_k}}/2^k$,

2° $\sum_{i=1}^{k-1}\max_{m,x}|S_m(x,\varphi_{n_i})|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$ (φ_{n_i} 是有界变差函数,故 $\max_{m,x}|S_m(x,\varphi_{n_i})|\leqslant B_{n_i}<\infty$, 其中 B_{n_i} 是正值常数 (参看 [180], p.47)).

由条件 1° 可知,

$$1/\sqrt{M_{n_k}}\leqslant 1/2^k.\tag{13}$$

令

$$\varPhi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{n_k}(x)/\sqrt{M_{n_k}},\tag{14}$$

则由 (13) 与 Lebesgue 定理 (引言中的断语 3°) 可知, 级数 (14) 在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处收敛于可积函数 $\varPhi(x)$.

现在我们证明, $\varPhi$ 便是所要的函数.

根据同上的 Lebesgue 定理可知,

$$S_i(x,\varPhi)=\sum_{k=1}^{\infty}S_i(x,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}.\tag{15}$$

设 $E=\overline{\lim}_{k\to\infty}E_{n_k}$[①], 则显然有 $mE=2\pi$ (参看引理中的性质 (iii)). 任取一点 $x_0\in E$, 而证明函数 $\varPhi$ 的 Fourier 级数在这一点发散.

因为 $x_0\in E$, 所以 $x_0\in E_{n_j}$ 对于无穷多个 j 都成立. 根据 (15) 可知:

$$S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varPhi)=\sum_{k=1}^{j-1}S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}+S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_j})/\sqrt{M_{n_j}}$$
$$+\sum_{k=i+1}^{\infty}S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_k})/\sqrt{M_{n_k}}.\tag{16}$$

又我们知道:

$$|S_k(x,f)|\leqslant k\int_0^{2\pi}|f(t)|dt\quad(k\geqslant1).\tag{17}$$

将 (16), (17), 1°, 2°, 以及引理中的 (i),(iv) 合并, 即可推出, 对于无穷多个 j 而言, 都有

$$|S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varPhi)|\geqslant|S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_j})|/\sqrt{M_{n_j}}-\sum_{k=1}^{j-1}|S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_k})|/\sqrt{M_{n_k}}$$
$$-\sum_{k=j+1}^{\infty}|S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varphi_{n_k})|/\sqrt{M_{n_k}},$$

也就是

$$\begin{aligned}|S_{p_{n_j},x_0}(x_0,\varPhi)|&\geqslant\sqrt{M_{n_j}}-\sqrt{M_{n_j}}/2-2\sum_{k=j+1}^{\infty}q_{n_j}/\sqrt{M_{n_k}}\\&\geqslant\sqrt{M_{n_j}}/2-2\sum_{k=j+1}^{\infty}1/2^k\\&=\sqrt{M_{n_j}}/2-2/2^j.\end{aligned}\tag{18}$$

由 (18) 可知,

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}|S_i(x_0,\varPhi)|=+\infty\quad(x_0\in E),$$

这就是说, 函数 $\varPhi$ 的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处无界发散.

注 Колмогоров [23] 还构造了一个函数 $f\in L[0,2\pi]$, 其 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上到处都是无界发散的.

25*. 一个 Fourier 级数, 其共轭级数不是 Fourier 级数.

第一例 设 $\varPhi$ 是例 24 中的函数, 其 Fourier 级数为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\tag{1}$$

---

① $\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=k}^{\infty}E_n$. 不难证明, $x\in\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n$ 等价于 x 属于无穷多个集 E_n 之中.

现在我们证明, 它的共轭级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{2}$$

不是 Fourier 级数.

我们作反面的假定, 也就是说, 假定级数 (2) 是某个 (L) 可积函数 f 的 Fourier 级数. 于是, 由 Féjer 定理 (引言中的断语 6°) 可知, 级数 (2) 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处可用算术平均值求和而得 f. 但 (2) 是 (1) 的共轭级数, 故仍由 Féjer 定理可知, 级数 (2) 也几乎处处可用算术平均值求和而得 $\overline{\Phi}$. 于是 $f(x) = \overline{\Phi}(x)$ 几乎对于一切 $x \in [0, 2\pi]$ 都成立. 由此即知, $\overline{\Phi} \in L[0, 2\pi]$. 但函数 $\Phi(x) > 0$, 故由 M. Riesz 定理 (引言中的断语 7°) 即知,

$$\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) \in L[0, 2\pi].$$

现在我们证明, 这个是不对的. 事实上,

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(x) \ln^+ \Phi(x) dx, \tag{3}$$

其中 $M_n = \sqrt{\ln n} - 2 < \sqrt{\ln n}$. 对于大的 n, 我们来估计下面的积分:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}} dx.$$

此时显然有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}} dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{J_k} \frac{m_k^2}{n} \ln^+ \frac{m_k^2}{n\sqrt{M_n}} dx \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{n}{\sqrt{M_n}} \\ &\geqslant \ln \frac{n}{(\ln n)^{1/4}} \geqslant \frac{1}{2} \ln n.\end{aligned} \tag{4}$$

将 (3) 与 (4) 合并, 便易于得出

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x) dx &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(x) \ln^+ \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\right) dx \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \ln_{n_k} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n_k}{(\ln n_k)^{1/4}} = \infty,\end{aligned}$$

也就是

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x) dx = +\infty.$$

得所欲证.

第二例 考虑级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}.$$

因为 $a_n = 1/\ln n\ (n = 2, 3, \cdots)$ 适合 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ 及

$$\Delta^2 a_n = O\left(\frac{1}{n^2 \ln^2 n}\right),$$

所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \cos nx / \ln n$ 是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数 (参看例 20 的注). 但其共轭级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

并不是某个 (L) 可积函数的 Fourier 级数 (参看例 8).

26*. 一个 (L) 可积函数, 其共轭函数在任何非空闭区间上都不 (L) 可积.

设 Φ 是例 24 中的 (L) 可积函数. 从例 25 中关于

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x) dx = +\infty$$

的证明, 我们见到在任一非空闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上, 都有

$$\int_\alpha^\beta \Phi(x) \ln^+ \Phi(x) dx = +\infty. \tag{1}$$

因此, 如果存在非空闭区间 $[\alpha_0, \beta_0]$, 使 $\overline{\Phi} \in L[\alpha_0, \beta_0]$, 那么我们可以作出如此的非负函数 $\Phi_1 \in L[0, 2\pi]$, 使在 $[\delta, \gamma] \subset [\alpha_0, \beta_0]$ 上, $\Phi_1(x) = \overline{\Phi}(x)$, 而且 $\overline{\Phi_1} \in L[0, 2\pi]$ (参看 [31]). 于是由 Riesz 定理即知, $\Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L[0, 2\pi]$. 这就是说,

$$\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) = \Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L[\delta, \gamma].$$

而这个结果与 (1) 矛盾, 因此 $\overline{\Phi} \,\overline{\in}\, L[\alpha_0, \beta_0]$.

27*. $L[0, 2\pi]$ 中的一个函数, 其 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处有界发散.

Колмогоров 构造了一个 (L) 可积函数 Φ, 其 Fourier 级数几乎处处无界发散:

$$\varlimsup_{i \to \infty} |S_i(x, \Phi)| = +\infty \tag{1}$$

(参看例 24). 这里有如此的问题发生: 可积函数的几乎处处发散的 Fourier 级数是否永远满足等式 (1)? Marcinkiewicz [108] 对这个问题作了否定的答案, 他根据 Колмогоров 的结果而构造了一个函数 $f \in L[0, 2\pi]$, 其 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处发散, 而且同时

$$\varlimsup_{n \to \infty} |S_n(x, f)| < +\infty \tag{2}$$

几乎对于一切 $x \in [0, 2\pi]$ 都成立, 也就是说, 函数 f 的 Fourier 级数几乎处处为有界发散.

我们先来证明, 如果 φ_n 是例 24 的引理中所定义的函数, 那么对于任何 $\varepsilon > 0$, 都有如此的 $\delta(\varepsilon) > 0$ 及 $N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N$ 时,

$$mE\left[x : \max_{m_1 \leqslant i \leqslant m_n} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n\right] > 2\pi - \varepsilon. \tag{3}$$

事实上, 假设 α 是相当小的正数, 而 τ_{k-1} 是一切满足条件

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| \geqslant \alpha \tag{4}$$

的点 $x \in \Delta_{k-1}$ 所成之集. 于是, 由 (4) 及例 24 中的不等式 (9) 可知:

$$|S_{m_k}(x, \varphi_n)| \geqslant \alpha \ln n - 2 \quad (x \in \tau_{k-1}), \tag{5}$$

其中 $k = 2, 3, \cdots, n - [\sqrt{n}]$. 和例 24 的引理里面一样, 我们注意到:

$$m\tau_{k-1} = 4\pi/(2n+1) - 4/n^2 - O(\alpha/n). \tag{6}$$

由 (6) 可以推出:

$$mN_n = m \bigcup_{k=2}^{n-[\sqrt{n}]} \tau_{k-1} = 2\pi - O(\alpha) - O(1/n). \tag{7}$$

又由 (5) 与 (7) 可知, 有如此的两个正数 α, β 存在, 使

$$\varliminf_{n\to\infty} mE\left[x : \max_{m_1 \leqslant i \leqslant m_n} |S_i(x, \varphi_n)| \geqslant \alpha \ln n\right] \geqslant \beta,$$

其中 m_1, m_n 是对于整数 n 所作的数 (参看例 24 的引理). 我们不难推演 (参看 (4)—(7)), 倘若 α 靠近 $+0$, 那么也可以假设 β 靠近 $2\pi - 0$. 由此即知, 对于任何 $\varepsilon > 0$ 而言, 都有如此的 $\delta > 0$ 存在, 使

$$\varliminf_{n\to\infty} mE\left[x : \max_{m_1 \leqslant i \leqslant m_n} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n\right] > 2\pi - \varepsilon.$$

因此, 有如此的 $N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N$ 时,

$$mE\left[x : \max_{m_1 \leqslant i \leqslant m_n} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n\right] > 2\pi - \varepsilon.$$

明所欲证.

现在着手构造所需的函数. 为此, 令 $f_n(x) = \varphi_n(x)/\ln n$. 则 f_n 显然是有界变差函数, 而且 $f_n(x) \geqslant 0$ 对于一切 x 都成立, 又

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx = \frac{2}{\ln n}, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} mE[x : f_n(x) > 0] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\left(m_k^{(n)}\right)^2} = 0, \tag{9}$$

其中 $\{m_k^{(n)}\}$ 是例 24 的引理中对于整数 n 所作的数列. 令

$$E_n^{(\delta)} = E\left[x : \max_{m_1^{(n)} \leqslant i \leqslant m_n^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\right] \quad (\delta > 0).$$

则由断语 (3) 可知, 对于任何 $\eta > 0$ 而言, 都有如此的 $\gamma = \gamma(\eta) > 0$ 与 $N = N(\eta)$ 存在, 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$mE\left[x : \max_{m_1^{(n)} \leqslant i \leqslant m_n^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \gamma\right] = mE_n^{(\gamma)} > 2\pi - \eta. \tag{10}$$

其次, 作闭区间 $d_k = [A_k + 1/(n \ln n), A_{k+1} - 1/(n \ln n)]$, 其中 $A_k = 4k\pi/(2n+1)$. 则这些闭区间与闭区间 $\{J_k\}$ 显然不相交 (参看例 24 的引理). 又令 $D_n = \cup_{k=1}^{n-1} d_k$.

兹证, 对于一切 i, n 与 $x \in D_n$ 而言, 都有

$$|S_i(x, f_n)| < M, \tag{11}$$

其中 M 是某个常数. 事实上, 我们只要证明, 当 $x \in D_n$ 时

$$\int_0^{2\pi} f_n(t)\frac{1}{|x-t|}dt \leqslant C \quad (C \text{ 是常数}) \tag{12}$$

即可.

假设 $x_0 \in d_k \subset D_n$. 则当 $n > 3$ 时,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f_n(t)\frac{1}{|x-t|}dt &= \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\ln n}\left\{\sum_{s=1}^{k_0-1}\int_{J_s}\frac{\varphi_n(t)}{x_0-t}dt + \int_{J_{k_0}}\frac{\varphi_n(t)}{x_0-t}dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{J_{k_0+1}}\frac{\varphi_n(t)}{x_0-t}dt + \sum_{s=k_0+2}^{n}\int_{J_s}\frac{\varphi_n(t)}{t-x_0}dt\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{\ln n}\left\{\sum_{s=1}^{k_0-1}\frac{m_s^2}{n}\cdot\frac{2n+1}{4\pi(k_0-s)}\cdot\frac{2}{m_s^2}\right. \\
&\quad + \frac{m_{k_0}^2}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{n\ln n}-\dfrac{1}{m_{k_0}^2}}\cdot\frac{2}{m_{k_0}^2} \\
&\quad + \frac{m_{k_0+1}^2}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{n\ln n}-\dfrac{1}{m_{k_0+1}^2}}\cdot\frac{2}{m_{k_0+1}^2} \\
&\quad \left. + \sum_{s=k_0+2}^{n}\frac{m_s^2}{n}\cdot\frac{2n+1}{4\pi(s-k_0-1)}\cdot\frac{2}{m_s^2}\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{\ln n}\left\{\sum_{s=1}^{k_0-1}\frac{1}{k_0-s} + \frac{4\ln n}{1-\dfrac{\ln n}{n}} + \sum_{s=k_0+2}^{n}\frac{1}{s-k_0-1}\right\} \leqslant C,
\end{aligned}$$

这就证明了不等式 (12). 其次, 显然有

$$mD_n = \left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n\ln n}\right)(n-1) \to 2\pi \quad (n \to \infty),$$

也就是

$$\lim_{n\to\infty} mD_n = 2\pi. \tag{13}$$

将 (11) 与 (13) 合并, 则得

$$\lim_{n\to\infty} mE[x : \max_i |S_i(x, f_n)| \leqslant M] = 2\pi. \tag{14}$$

兹令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{15}$$

而证明: 选取适当的数列 $\{n_k\}$ 时, 函数 f 是有意义的, 而且就是我们所要的函数. 假设已经定义了

$$4 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k, \tag{16}$$

$$2 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_{k-1}, \tag{17}$$

其中 n_i 与 q_i 都是整数. 令

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(x), \tag{18}$$

并作集合

$$E_{k,q} = E\left[x : |S_p(x, \Phi_k) - \Phi_k(x)| < \frac{1}{k} \text{ 对于一切 } p \geqslant q \text{ 成立}\right]. \tag{19}$$

(19) 则由 Егоров 定理与 $\Phi_k(x)$ 的 Fourier 级数的收敛性可知, 当 $q \geqslant q(k)$ 时,

$$mE_{k,q}^c = m\{[0, 2\pi] \diagdown E_{k,q}\} < \frac{1}{2^k}. \tag{20}$$

令

$$q_k = \max\{q(k), m_{n_k}^{(n_k)}\}, \tag{21}$$

并定义如此的正整数 n_{k+1}, 使

$$\int_0^{2\pi} f_{n_k}(t)dt > q_k \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)dt, \tag{22}$$

$$mE[x : \max_i |S_i(x, f_{n_{k+1}})| > M] < \frac{1}{2^k}, \tag{23}$$

$$n_{k+1} > n_k, \quad m^{(n_{k+1})} > q_k. \tag{24}$$

由 (8) 与 (14) 可知, 这样的数目 n_{k+1} 是存在的. 这样, 数列 $\{n_k\}$ 与 $\{q_k\}$ 便可由归纳法完全决定.

因为 $q_k \geqslant 2$, 故由 (22) 与 (15) 可知, $f \in L[0, 2\pi]$ (参看引言中的断语 3°).

令 $\psi_k(x) = f(x) - \Phi_k(x)$, 则有

$$S_i(x, f) = S_i(x, \Phi_k) + S_i(x, f_{n_{k+1}}) + S_i(x, \psi_{k+1}). \tag{25}$$

在 (25) 中选取如此的 k, 使

$$q_k \leqslant i < q_{k+1}. \tag{26}$$

则由 (22), (26) 与 (8) 显然可知,

$$\begin{aligned}
|S_i(x, \psi_{k+1})| &\leqslant 4i \int_0^{2\pi} \psi_{k+1}(t)dt \leqslant 4i \int_0^{2\pi} \left\{\sum_{s=k+2}^{\infty} f_{n_s}(t)\right\} dt \\
&\leqslant 8i \int_0^{2\pi} f_{n_{k+2}}(t)dt \leqslant \frac{8i}{q_{k+1}} \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)dt \\
&\leqslant 8 \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)dt = O(1),
\end{aligned}$$

也就是说,

$$\lim_{i\to\infty} |S_i(x, \psi_{k+1})| = 0 \text{ 对于一切 } x \in [0, 2\pi] \text{ 都成立}. \tag{27}$$

但由 (26) 可知, 当 $i \to \infty$ 时 $k \to \infty$. 又因为当 $k \to \infty$ 时, $\Phi_k(x) \to f(x)$ 对于几乎一切 $x \in [0, 2\pi]$ 都成立 (参看 (15) 与 (18)), 所以当 $i \to \infty$ 时, $S_i(x, \Phi_k) \to f(x)$ 对于几乎一切 $x \in [0, 2\pi]$ 都成立 (参看 (19)—(21)). 于是

$$\lim_{i\to\infty} S_i(x, \Phi_k) = f(x) \text{ 对于一切 } x \in A \subset [0, 2\pi] \text{ 都成立,} \tag{28}$$

其中 $mA = 2\pi$. 利用 (23), 则得

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f_{n_{k+1}})| \leqslant M \text{ 对于一切 } x \in P \subset [0, 2\pi] \text{ 都成立,} \tag{29}$$

其中 $mP = 2\pi$, 而 $q_k \leqslant i < q_{k+1}$.

将 (25), (27)—(29) 合并, 即可明确, 几乎对于一切 $x \in [0, 2\pi]$, 都有

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f)| < +\infty,$$

这就是说, 函数 f 确实具有性质 (2).

兹证函数 f 的 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处发散.

取定一个任意的 $\varepsilon > 0$. 由断语 (3) 可知, 有如此的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 与 $N = N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n \geqslant N$ 时,

$$mE\left[x : \max_{m_1^{(n)} \leqslant i \leqslant m_n^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\right] = mE_n^{(\delta)} > 2\pi - \varepsilon. \tag{30}$$

令 $E = \overline{\lim}_{k\to\infty}\{E_{n_k}^{(\delta)} \cap A\}$, 则由 (30) 可知, $mE \geqslant 2\pi - \varepsilon$. 设 $x_0 \in E$, 则

$$x_0 \in A, \quad x_0 \in E_{n_{k_j}}^{(\delta)} \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

选取如此的标号 i, 使

$$q_{k_j - 1} \leqslant i \leqslant q_{k_j}, \tag{31}$$

则

$$S_i(x_0, f) = S_i(x_0, \Phi_{k_j - 1}) + S_i(x_0, f_{n_{k_j}}) + S_i(x_0, \psi_{k_j}). \tag{32}$$

但 $x_0 \in A$, 所以

$$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \Phi_{k_j - 1}) = f(x_0) \tag{33}$$

(参看 (28) 与 (31)). 仿此 (参看 (27))

$$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \psi_{k_j}) = 0. \tag{34}$$

根据 (30) 以及 $x_0 \in E_{n_{k_j}}^{(\delta)}$ 的事实可知:

$$\max_{m_1^{(n_{k_j})} \leqslant i \leqslant m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})}} |S_i(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta, \quad \text{当 } n_{k_j} \geqslant N \text{ 时.} \tag{35}$$

但

$$q_{k_j - 1} < m_1^{(n_{k_j})} < m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})} \leqslant q_{k_j} \tag{36}$$

(参看 (21) 与 (24)), 故由 (35) 即知, 有满足 (31) 的标号 $i_0 = i(x_0, j)$ 存在, 使

$$|S_{i_0}(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta > 0. \tag{37}$$

于是将 (32)—(34) 与 (37) 合并即知, 可以找到无穷多个标号 $i_0 = i(x_0, j)$, 使

$$|S_{i_0}(x_0, f) - f(x_0)| > \delta,$$

也就是说, 当 $i \to \infty$ 时,

$$S_i(x_0, f) \nrightarrow f(x_0) \quad (x_0 \in E). \tag{38}$$

由 (38) 即知, 函数 f 的 Fourier 级数在 E 上几乎处处发散. 这一点可由 Féjer 定理的推论直接导出 (参看引言中的断语 6°).

但集 E 的测度 $\geqslant 2\pi - \varepsilon$, 而 ε 是任意的, 又函数 f 的作法与 ε 无关, 所以由此即知, 函数 f 的 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处发散.

28*. $L(\ln^+ \ln^+ L)^{1-\varepsilon}$ 中的一个函数, 其 Fourier 级数几乎处处发散.

可以证明, $L^2[-\pi, \pi]$ 中的任一个函数, 其 Fourier 级数几乎处处收敛.

上述结论是有名的 Лузин 猜测, 但长期以来悬而未决. Carleson 在文献 [55] 中证明了这个结论. 其后, Hunt [95] 进一步证明了当 $p > 1$ 时, $L^p[-\pi, \pi]$ 中的函数的 Fourier 级数也几乎处处收敛. 陈永明 [57] 则给出如下的例子: $L(\ln^+ \ln^+ L)^{1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) 中的一个函数, 其 Fourier 级数几乎处处发散. 这是继 Колмогоров, Marcinkiewicz 之后的又进一步的反例. 读者有兴趣可参看原文.

29*. $[0, 2\pi]$ 上的一个 (L) 可积函数 f, 它的共轭函数 $\bar{f}$ 也是 (L) 可积的, 并且 f 与 $\bar{f}$ 的 Fourier 级数在 $[0, 2\pi]$ 上都是几乎处处发散的.

下面的例子属于 Hardy-Rogosinski 和 Sunouchi (参看 [88] 和 [161]). 为构造这个例子, 我们先要证明如次的引理.

引理 对于每个整数 $n \geqslant 2$, 都可以找到如此的三角多项式 $T_n(x)$ 与集合 $E_n \subset [0, 2\pi]$ 以及如此的数 $M_n > 0$, 使

(i) 当 $x \in [0, 2\pi)$ 时 $T_n(x) \geqslant 0$,

(ii) $\int_0^{2\pi} T_n(x)dx = \pi$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} mE_n = 2\pi$, $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$,

(iv) 对于每点 $x_0 \in E_n$, 都有如此的标号 p_{n,x_0} 存在, 使

$$|S_{p_n,x_0}(x_0, T_n)| \geqslant M_n,$$

其中 $S_k(x, T_n)$ 是 $T_n(x)$ 的 Fourier 级数的部分和.

证 令 $A_k = 4k\pi/(2n+1)$, 其中 $k = 0, 1, \cdots, n$. 对于已给的 n, 易于作出一列 $n+1$ 个如此的数 $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$, 使

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } m_0 \geqslant n^4 \\ &\text{b) } m_{k+1} > 2m_k, \\ &\text{c) } 2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 λ_k 是整数. 令

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} K_{m_i}(x - A_i), \tag{2}$$

其中 $K_i(t)$ 是 Féjer 核, 即

$$K_i(t)=\frac{1}{2(i+1)}\left[\frac{\sin(i+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{i}\frac{i+1-j}{i+1}\cos jt \tag{3}$$

(参看 [180], p.45). 由 (2) 与 (3) 可知, $T_n(x)$ 是 m_n 次三角多项式, 它满足引理中的条件 (i) 与 (ii). 此时显然有

$$\begin{aligned}
S_{m_k}(x,T_n)&=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-A_i)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_i+1-j}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\}\right]\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-A_i)\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{(m_k+1-j)+m_i-m_k}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\}\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-A_i)\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m_k+1}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_k+1-j}{m_k+1}\cos j(x-A_i)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\cos j(x-A_i)\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-A_i)\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m_k+1}{m_i+1}\left[K_{m_k}(x-A_i)-\frac{1}{2}\right]\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\left[D_{m_k}(x-A_i)-\frac{1}{2}\right]\\
&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k}K_{m_i}(x-A_i)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k+1}{m_i+1}K_{m_k}(x-A_i)\\
&\quad+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}D_{m_k}(x-A_i)\\
&=\Sigma_{k,1}+\Sigma_{k,2}+\Sigma_{k,3},\ \text{因为}\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m_k+1}{m_i+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_i-m_k}{m_i+1}.
\end{aligned}\tag{4}$$

兹设 $\Delta_k=[A_k+n^{-2},A_{k-1}-n^{-2}],k=0,1,\cdots,n-1$, 这是一组互不相交的区间. 我们要估计 $\Sigma_{k,i}$ $(i=1,2,3)$, 当 $x\in\Delta_k$ 时. 因为 $K_i(t)=O(1/(it^2))$ (参看

[180], p.45), 故由 (1) 可知, 当 $x \in \Delta_k$ 而 $i \leqslant k$ 时, 即有

$$K_{m_i}(x - A_i) = O(1/m_i(x - A_i)^2) = O(n^4/m_i) = O(1).$$

因此,

$$\Sigma_{k,1} = O(1). \tag{5}$$

仿此, 当 $x \in \Delta_k$ 时,

$$\begin{aligned}\Sigma_{k,2} &= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n+1} \frac{m_k+1}{m_i+1} K_{m_k}(x - A_i) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k+1}{m_i+1} O\left(\frac{1}{m_k(x-A_i)^2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O\left(\frac{n^4}{m_i+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O(1) = O(1).\end{aligned} \tag{6}$$

由 (4)—(6) 可以推出: 当 $x \in \Delta_k$ 时, 有

$$|S_{m_k}(x, T_n)| > |\Sigma_{k,3}| - O(1). \tag{7}$$

又根据 (1) 可得:

$$\begin{aligned}\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x - A_i) &= \sin\left[\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x - A_{k+1}) + \left(m_k + \frac{1}{2}\right)\frac{K+1-i}{2n+1}4\pi\right] \\ &= \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x - A_{k+1}).\end{aligned}$$

因此,

$$\Sigma_{k,3} = \frac{1}{n+1} \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1} - x) \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - m_k}{m_i + 1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i - x)}. \tag{8}$$

现在取 $k < n - \sqrt{n}$. 则当 $x \in \Delta_k$ 时, 由 (1) 即知:

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - m_k}{m_i+1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i - x)} &\geqslant \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - \dfrac{m_i - 1}{2}}{m_i + 1} \frac{1}{A_i - x} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{A_i - A_k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} \\ &\geqslant \frac{2n+1}{8\pi} \ln(n-k) \geqslant \frac{2n+1}{8\pi} \ln\sqrt{n} = \frac{2n+1}{16\pi} \ln n.\end{aligned} \tag{9}$$

因此, 当 $k < n - \sqrt{n}$ 而 $x \in \Delta_k$ 时,

$$\begin{aligned}|S_{m_k}(x, T_n)| &\geqslant \frac{(2n+1)}{16\pi} \frac{\ln n}{n+1} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1} - x)\right| - O(1) \\ &\geqslant \frac{\ln n}{16\pi} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| - O(1)\end{aligned} \tag{10}$$

(参看 (1) 中的关系式 c)). 现在我们定义集合

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \left\{\Delta_k \bigcap E\left[x : \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right]\right\}. \tag{11}$$

由 (10) 与 (11) 可得:

$$|S_{m_k}(x_0, T_n)| \geqslant \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - O(1) \geqslant \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - C = M_n,$$

当 $x_0 \in \Delta_k \cap E[x : |\sin(m_k + \frac{1}{2})x| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}] \subset E_n$, 其中 C 是某个固定的常数.

兹证, 当 $n \to \infty$ 时 $mE_n \to 2\pi$. 事实上,

$$m\left\{\bigcup_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k\right\} = \frac{4\pi}{2n+1}[n-\sqrt{n}] - \frac{2}{n^2}[n-\sqrt{n}] \to 2\pi,$$

当 $n \to \infty$ 时. 而集合 E_n 是由集合 $\cup_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]}\Delta_k$ 的每个 Δ_k 中 $(k = 0, 1, \cdots, n-\sqrt{n})$ 弃去一些点 x 而得到的, 这些点 x 满足条件

$$|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{12}$$

但 $m_k \geqslant n^4$ (参看 (1)), 而闭区间 Δ_k 的长度是 $\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^2}$. 因此, 由 $\cup_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]}\Delta_k$ 中所弃去的点所成之集, 其测度与 $\sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} O(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}) = O(\frac{1}{\sqrt{\ln n}})$ 同阶, 也就是说, 当 $n \to \infty$ 时这个测度趋向于零. 于是当 $n \to \infty$ 时 $mE_n \to 2\pi$. 但 $n \to \infty$ 时 $M_n \to \infty$, 所以条件 (iii) 与 (iv) 都成立, 从而引理便完全证明了.

我们还要陈述一个断语而不加证明.

Kutner 定理 假设三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

在正测度集 E 上几乎处处收敛. 并设共轭级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

在 E 上几乎处处可用算术平均值法求和, 那么它在 E 上也几乎处处收敛 (参看 [32]).

推论 假设函数 $f \in L[0, 2\pi]$ 的 Fourier 级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

在 E 上几乎处处收敛, 那么共轭级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

在 E 上也几乎处处收敛.

此事可由 Kutner 定理与 Féjer 定理 (引言中的断语 6°) 立刻推出.

现在我们着手构造所需的函数.

因为 $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$, 其中 M_n 是由引理选出来的, 所以序列 $\{M_n\}$ 必定含有如此的子列 $\{M_{n_k}\}$, 使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{M_{n_k}} < \infty. \tag{13}$$

考虑多项式序列 $\{T_{n_k}(x)\}$, 而将实多项式 $T_{n_k}(x)$ 写成指数的形式, 即

$$T_{n_k}(x) = \sum_{j=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_j^{(k)} e^{ijx} \quad (k=1,2,\cdots). \tag{14}$$

又选取如此的整数序列 $\{\nu_k\}$, 使

$$\nu_1 > m_{n_1}, \quad \nu_2 > \nu_1 + m_{n_1} + m_{n_2}, \quad \cdots, \quad \nu_k > \nu_{k-1} + m_{n_{k-1}} + m_{n_k}, \quad \cdots.$$

在数目 ν_k 的这种选法之下, 各个多项式

$$P_{n_k}(x) = \frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}} T_{n_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{j=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_j^{(k)} e^{i(j+\nu_k)x} \tag{15}$$

彼此不包含具有 x 的相同倍数的项. 作形式的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x). \tag{16}$$

则因

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} |P_{n_k}(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} |T_{n_k}(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{M_{n_k}}} < \infty$$

(参看引理, (13)—(15)), 故由 Lebesgue 定理 (引言中的断语 3°) 可知, 级数 (16) 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处收敛于某个 (L) 可积的复值函数 $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

兹证, 实值函数 f_1 即为所求的函数. 事实上, 将级数 (16) 乘以 e^{-ikx} 以后仍旧可以逐项求积分, 因而函数 F 的复数 Fourier 级数可由级数 (16) 得出, 只需将各个多项式 $P_{n_k}(x)$ 展开而按照递增的方幂 e^{ikx} 排列即可. 于是

$$F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx \quad (k=1,2,\cdots). \tag{17}$$

兹证级数 (17) 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处发散. 设 $E = \overline{\lim}_{k\to\infty} E_{n_k}$, 则显然有 $mE = 2\pi$ (参看引理). 任取一点 $x_0 \in E$, 则 x_0 属于无穷多个 E_{n_k}, 即 $x_0 \in E_{n_{k_s}} (s = 1, 2, \cdots)$. 各项 $P_{n_{k_s}}(x)$ 在级数 (17) 按照 e^{ikx} 的指数的递增顺序而出现. 因此, 由引理即知, 对于 x_0 这点可以找到无穷多对如此的数目 $\alpha_s < \beta_s$, 使

$$\left| \sum_{\nu=\alpha_s}^{\beta_s} c_\nu e^{i\nu x_0} \right| \geqslant \sqrt{M_{n_{k_s}}}. \tag{18}$$

这就说明了, Cauchy 的级数收敛性的准则不成立. 从而级数 (17) 在 x_0 这点是发散的. 此外, 由 (18) 可以推知, 几乎对于一切 $x_0 \in [0, 2\pi]$, 都有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx_0} \right| = +\infty. \tag{19}$$

现在令 $c_k = a_k - ib_k \ (k = 1, 2, \cdots)$, 其中 a_k, b_k 都是实数. 此时级数 (17) 可以写成

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + i \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{20}$$

和前面一样, 将级数 (16) 乘以 $\cos kx$ 而求积分, 便得到

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} [f_1(x) + if_2(x)] \cos kx dx = (a_k - ib_k)\pi.$$

仿此也有

$$\int_0^{2\pi} F(x)\sin kxdx = \int_0^{2\pi}[f_1(x)+if_2(x)]\sin kxdx = (a_k - ib_k)\pi i.$$

由上列等式即知:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos kxdx = a_k,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\sin kxdx = b_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\cos kxdx = -b_k,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\sin kxdx = a_k,$$

也就是说, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 是函数 $f_1 \in L[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数, 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx - b_k\cos kx)$ 是函数 f_2 的 Fourier 级数. 但后者是前者的共轭级数, 因而 $\bar{f}_1(x) = f_2(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处成立. 于是

$$F(x) = f_1(x) + i\bar{f}_1(x)$$

根据 (19), (20) 以及 Kutner 定理的推论即可明确, (20) 中的两个共轭 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上都是几乎处处发散的. 因此, 我们可以取 $f_1(x)$ 作为函数 $f(x)$. 这样便作出了具有所需性质的函数.

30*. 任给 F_σ 型集 $E\subset[0,2\pi]$, 可构造函数 $f\in L[0,2\pi]$, 它的 Fourier 级数在 E 上收敛, 而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上为无界发散.

这个例子是由 Zeller 所提供的. 细节和参考文献已在 [178] 中给出.

注 在作出发散三角级数 (Fourier 级数) 的同时, 人们也研究了使级数收敛或者发散的集合. 一般说来, 使三角级数 (Fourier 级数) 收敛的点所成之集, 都具有型式 $F_{\sigma\delta}$ (集 $E\subset[a,b]$ 叫作 $[a,b]$ 中的 $F_{\sigma\delta}$ 型集, 如果 $E=\cap_{k=1}^{\infty}E_k$, 其中各个 E_k 都是 F_σ 型集, 而且 $E_k\subset[a,b]$), 但不一定是 F_σ 型集 (参看 [39], p.34). 1918 年时, Rajchman 对于已给的闭集 $E\subset[0,2\pi]$ 作出了一个三角级数的例子, 它在 E 上收敛, 在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散, 而且它的系数趋向于零 (参看 [180], p.269).

1949 年时, Herzog 和 Piranian [91] 对于已给的 F_σ 型集 $E\subset[0,2\pi]$ 作出了一个 Taylor 级数, 使它在 E 上收敛而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散.

1951 年时, Стеикин [30] 作出了一个三角级数的例子, 它在已给的 F_σ 型集 E 上收敛, 而在 E 外面发散.

Zeller 的例子是这方面的最新结果. 至于作出一个三角级数, 使它在已知的 F_σ 型集 $F\subset[0,2\pi]$ 上收敛于零而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散的问题, 仍是至今尚未解决的一个难题.

第十三章

平面点集

0. 引言.

这一章处理的是 R^2 中的点集 —— 平面点集方面的例子. 关于平面点集的有界性, 开、闭性, 紧性, 稠密性和疏性, 以及平面点集的测度[①]等概念与直线上的点集中的相应概念基本相同, 这里不再赘述 (可参看 [8], [14] 和 [18]).

两个非空集 A 和 B 叫作隔离的, 是指它们不相交, 并且每个集都不含有另一集的聚点, 即 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. 非空集 E 叫作连通的, 是指它不能表为两个不相交的非空闭集的并集. 连通的开集叫作区域. 至少含有两点的连通闭集叫作连续点集.

闭区间 (可以取作单位闭区间 $[0,1]$) 到 R^2 内的一个连续映射 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 的值域叫作平面连续曲线 (今后, 我们称这种平面连续曲线为 Jordan 曲线). 在这一章里, 若不作相反的声明, 我们所指的平面连续曲线都是 Jordan 曲线.

设平面曲线 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, 这里, φ 和 ψ 不必要求连续[②], Peano 给出它的可求长的定义如下: 任给分法

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

作和数

$$\begin{aligned} s(\Delta) &= s(\Delta; x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}, \end{aligned}$$

---

① R^2 中点集的测度称为平面测度; 而 R' 中点集的测度称为线性测度.

② 当 φ 和 ψ 不全连续时, 我们也称 φ, ψ 的值域为平面曲线.

若 $s=\sup_{\Delta} s(\Delta)$ 是一个有限数, 则称曲线 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 是可求长的, 数 s 就叫作它的长度. 可以证明:

1° 曲线 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 是可求长的, 当且仅当 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数 (参看 [8], p.268).

2° 如果可求长曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么其长度可用式子

$$s=\lim_{\delta\to 0} s(\Delta) \tag{1}$$

来表示, 其中 δ 是分法 Δ 中 $|x_i-x_{i-1}|$ 的最大值 (参看 [19], pp.223—224).

设 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的 Jordan 曲线, 假如当 $t\neq t'$ 时,

$$(\varphi(t),\psi(t))\neq(\varphi(t'),\psi(t')), \tag{2}$$

则称所考虑的 Jordan 曲线为*无重点的 Jordan 曲线*, 或称为*简单曲线*或*简单弧*. 假如 (2) 当 $a<t<b,\ a<t'<b$ 时成立, 但是

$$(\varphi(a),\psi(a))=(\varphi(b),\psi(b))$$

的话, $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 就表示 *Jordan 闭曲线*. 这种曲线就是跟圆周成一一对应的连续曲线.

在 Jordan 闭曲线的性质中, 最重要的是下述那个看起来似乎极“明显”的命题: 任何 Jordan 闭曲线 c 划分平面为两个不相交的区域, C 是它们的共同边界 (参看 [8], pp.262—267). 这两个区域都叫作 *Jordan 区域*. 不是 Jordan 区域的区域就叫作*非 Jordan 区域*.

有界平面点集 S 称为*具有面积*, 是指它的特征函数 φ_s 在包含 S 的一个闭矩形 D 上 (R) 可积, 而 D 的各边分别平行于坐标轴. 如果 S 有面积, 它的面积 $A(S)$ 就等于 φ_s 在 D 上的 (R) 二重积分:

$$A(S)=\iint_D \varphi_s(x,y)dxdy.$$

有面积和面积概念并不依赖包含它的矩形 D.

我们用平行于矩形各边的直线网 $\mathscr{D}$ 将 D 细分为许多闭的小矩形, 设 $a(\mathscr{D})$ 为所有是 S 的子集的那些小矩形的面积之和, $A(\mathscr{D})$ 为所有不是 S^c 的子集的那些小矩形的面积之和. S 的*内面积*和*外面积*分别记作 $\underline{A}(S)$ 和 $\overline{A}(S)$ 并定义为

$$\underline{A}(S)=\sup_{\mathscr{D}} a(\mathscr{D}),\quad \overline{A}(S)=\inf_{\mathscr{D}} A(\mathscr{D}).$$

这些定义仍是与 D 无关. 有界集 S 有面积, 当且仅当 $\underline{A}(S)=\overline{A}(S)$, 如果这个等式成立, 那么

$$A(S)=\underline{A}(S)=\overline{A}(S).$$

有界集 S 有面积的充要条件是, 它的边界 $F(S)$ 有面积且面积等于零. 等价地, 一个有界集有面积当且仅当它的边界的平面测度等于零.

有关平面面积的初步论述, 包括前面几个陈述的证明, 可参看 [118], pp.431—465.

本章的例 39 还将涉及曲面面积.

1. 序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均有聚点, 而 $\{(x_n,y_n)\}$ 没有聚点.

在平面 R^2 中取 $x_{2n}=1/n$, $y_{2n}=n$, $x_{2n+1}=n$, $y_{2n+1}=1/n$, 则 0 既是 $\{x_n\}$ 的聚点, 也是 $\{y_n\}$ 的聚点. 由于

$$(x_n,y_n)=\begin{cases}(1/k,k), & n=2k,\\ (k,1/k), & n=2k+1,\end{cases}$$

可见 $\{(x_n,y_n)\}$ 没有聚点.

注 容易证明, 若 (a,b) 是 $\{(x_n,y_n)\}$ 的聚点, 则 a 是 $\{x_n\}$ 的聚点, b 是 $\{y_n\}$ 的聚点. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

2. 一个可数集 E, 使 E' 具有连续统的势, 且 $E\cap E'=\varnothing$.

设 E 是由一切形如 $(m/2^n,1/2^n)$ 的点所成之平面点集, 这里, m,n 都是整数, 则 E 是可数集, 且 E' 是由一切形如 $(x,0)$ 的点所成之集, 其中 x 走遍实数集. 因此, E' 具有连续统的势, 且 $E\cap E'=\varnothing$.

3. 具有不可数闭包的孤立点集.

例 2 中的集 E 具有这种性质.

4. 距离为零的两个不相交的闭集.

设

$$F_1=\{(x,y):xy=1\},\quad F_2=\{(x,y):y=0,x\text{ 任意}\},$$

则 F_1 和 F_2 都是闭集且不相交. 任给 $\varepsilon>0$, 在 F_1 和 F_2 中分别取点 $(2/\varepsilon,\varepsilon/2)$ 和 $(2/\varepsilon,0)$. 易见, 这两点之间的距离为 $\varepsilon/2<\varepsilon$. 由此可知,

$$d(F_1,F_2)=\inf_{\substack{p\in F_1\\ q\in F_2}} d(p,q)=0.$$

注 设 F_1 和 F_2 为两个不空的闭集, 并且其中至少有一个是有界的, 那么, 若 $d(F_1,F_2)=0$, 则 F_1 与 F_2 必定相交 (参看 [27], 中译本 p.46). 上述反例之所以成为可能, 是由于给定的两个闭集都是无界的.

5. 平面上的一个开集, 它不能表成有限个或可数个两两不相交的开区间①的并集.

设 G 为图 20 所示的封闭图形内的平面开集 (不包含边界). 显然, 它不是开区间. 因而, 如果 G 能表成两两不相交的开区间的并集, 那么它至少要表成两个以上的开区间的并集.

设 $G=\cup_{i=1}^{\infty}I_i$, 其中 I_i $(i=1,2,\cdots)$ 为两两不相交的开区间. 易见, G 与 Ox 轴的交集是 Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$, G 与 Oy 轴的交集是 Oy 轴上的开区间 $(-2,2)$. 我们先要证明, 这两个开区间中至少有一个要与 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中的两个以上的开区间 I_i 相交. 显然, 我们只要证明, 如果 Oy 轴上的开区间 $(-2,2)$ 只与一个

①形如 $\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$ 的集, 称为 R^2 中的开区间.

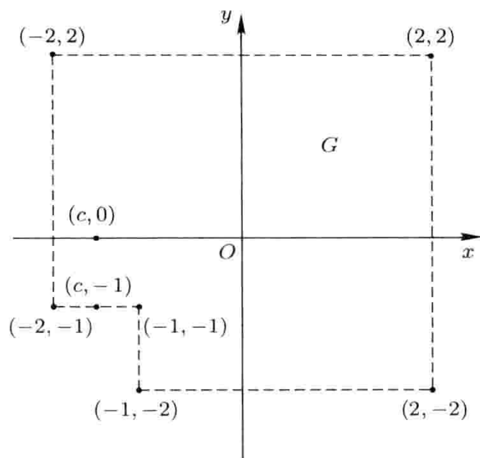


图 20

开区间 I_i 相交, 那么, Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 就至少要与 $\{I_i\}$ 中的两个以上的开区间 I_i 相交. 设 Oy 轴上的开区间 $(-2,2)$ 只与一个开区间 I_{i_0} 相交, 则 I_{i_0} 必可表成下列形式:

$$I_{i_0}=\{(x,y):a_1<x<b_1,\ -2<y<2\}.$$

兹证, 此时必有 $0<b_1<2, -1\leqslant a_1$. 第一个不等式是显然的, 我们只要证明 $a_1\geqslant -1$ 即可. 假若 $a_1<-1$, 那么任取实数 c, 适合 $a_1<c\leqslant -1$, 就有 $(c,-1)\in I_{i_0}$, 从而 $(c,-1)\in G$. 然而, G 并不包含所示图形的边界上的点. 这个矛盾表明了 $a_1\geqslant -1$.

由于 $-1\leqslant a_1$, 所以当 $-2<c\leqslant -1$ 时, 点 $(c,0)\in G$, 而且此点属于 Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 而不属于开区间 I_{i_0}; 又, 点 $(0,0)$ 既属于 Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 且属于开区间 I_{i_0}. 这就表明, Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 至少要与 $\{I_i\}$ 中的两个以上的开区间 I_i 相交.

今设 Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 与开区间 I_i 及 I_j 相交, 而对其他的任何 n $(n\neq i, n\neq j)$, I_n 与 Ox 轴的交集 (记作 $R_x\cap I_n$) 是 Ox 轴上的包含于 $(-2,2)$ 的开区间或空集. 于是, Ox 轴上的开区间 $(-2,2)$ 可表成开集 $R_x\cap I_i$ 与 $\cup_{n\neq i}(R_x\cap I_n)$ 的并集, 而且由于 $\{I_n\}$ 两两不相交, 因而

$$R_x\cap G=R_x\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\right)=(R_x\cap I_i)\cup\left(\bigcup_{n\neq i}(R_x\cap I_n)\right)$$

是两个不相交的非空开集的并集. 然而, 我们知道, 实数轴上的任何一个开区间 (a,b) 都不可能表成两个不相交的非空开集的并集. 由此导致矛盾. 这个矛盾说明了 G 不可能表成有限个或可数个两两不相交的开区间的并集.

注 直线上的每个非空开集均可表成有限个或可数个两两不相交的开区间的并集. 上述反例说明了不能把这个命题转移到平面开集的情形.

6. 单位正方形内的一个可测子集, 它不能表成可数个 "矩形"① 的并集.

下面的例子是由 Weger [172] 作出的.

设 C 为 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, 令

$$S=\{(x,y):x-y\in C,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

兹证, 若 $A\times B\subset S$, 则或者有 $mA=0$, 或者有 $mB=0$. 事实上, $A\times B\subset S$ 蕴涵了

$$A-B=\{x-y:x\in A,y\in B\}\subset C.$$

若 $mA>0$ 且 $mB>0$, 则 $A-B$ 将有非空的内部. 此为矛盾.

因为 $A\times B\subset S$ 蕴涵 $mA=0$ 或 $mB=0$, 而 S 具有正测度, 所以 S 不能表成可数个 "矩形" 的并集.

7. 一个平面点集 E, 一方面 E 可表成两个不相交的集 A 与 B 的并, 另一方面, E 分别与 A 及 B 可合.

设 $M^*=\varphi(M)$ 是将平面 R^2 变为自身的一个映射, 如果任何两点的距离对于这个变换不变, 即

$$d(\varphi(M),\varphi(N))=d(M,N)\quad (M,N\in R^2),$$

则称 $M^*=\varphi(M)$ 是一个运动.

集 A 与 B 叫作可合的, 是指存在 A 到 B 上的一个运动.

为了构造具有所需性质的平面点集 E, 我们在复变量 z 的平面上考察两个运动

$$R(z)=e^iz,\quad T(z)=z+1.$$

假设 E 是由点 $z=0$ 以及由 $z=0$ 经过有限回 R 及 T 的运动所得诸点的全体. 于是, E 中每一点可以表为 e^i 的一个多项式, 其系数都是非负的整数, 又因 e^i 是一超越数, 所以将各点表示为 e^i 的多项式时, 其方法是唯一的. 将 E 中的点, 其 e^i 的多项式表示中没有常数项的, 记其全体为 A, 置 $B=E\backslash A$, 则 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=E$. 除此而外且有

$$R(E)=A,\quad T(E)=B.$$

也就是说, E 可表成两个不相交的集 A 与 B 的并, 而且 E 分别与 A 及 B 可合.

8. 平面完备疏集 —— Sierpiński 地毯、Sierpiński 墓垛和 Cantor 栉

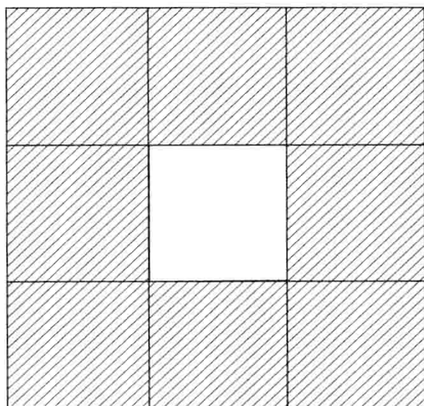
(1) Sierpiński 地毯

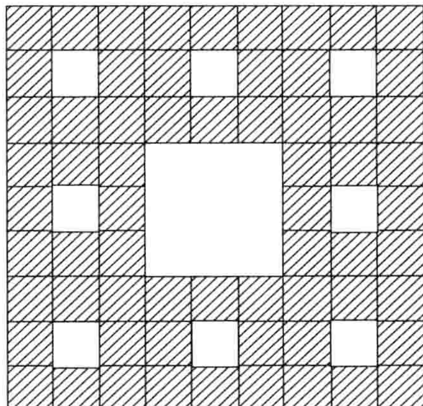
在平面上以下面的方法作集 A : 用直线 $x=1/3,\ x=2/3;\ y=1/3, y=2/3$ 分正方形 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 为 9 个相等的正方形, 并去掉中心的正方形 (即正

①设 A,B 是单位区间内的可测子集, 称 $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ 为 "矩形".

方形 $1/3 < x < 2/3, 1/3 < y < 2/3$). 然后, 把剩下的 8 个闭正方形中的每一个都分为 9 个相等的正方形. 并去掉所有的中心正方形, 将此过程无限继续下去, 在可数次之后, 剩下的集用 A 表之 (它被称为 "Sierpiński 地毯").

兹证, A 为完备疏集. 为方便起见, 我们把中心那个被删去的开正方形叫作第一级开正方形, 而把在平面上删去中间那个开正方形后剩下的 8 个闭正方形叫作第一级闭正方形 (参看图 21). 类似地定义二级闭正方形, 它们共有 8^2 个, 每一个的边长是 $1/3^2$ (参看图 22), 以及二级开正方形, 它们共有 8 个, 每一个的边长是 $1/3^2$. 容易看出, 用这种方法可以定义所有级的开正方形和闭正方形.


图 21


图 22

令 P_n 表全部 n 级闭正方形之并, 显然,

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n.$$

因为 P_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 都是闭集, 所以 A 也是闭集.

为证 A 是无处稠密的, 我们考察任意的开圆盘 J. 这个圆盘或者完全不含有集 A 的点, 或者至少含有这个集的一点 M. 我们要证明: 在后一种情况下圆盘 J 内有一个完全不含集 A 的点的较小的圆盘. 为了证实这一断语, 我们找出某个 n 级闭正方形 K_n, 它含有点 M, 并且它的对角线之长小于由点 M 到圆盘 J 的边界的距离 (因为闭正方形的对角线是在级数 n 趋于无穷时而趋于零的, 所以这件事是可以作到的). 这个闭正方形完全在圆盘 J 之内 (参看图 23), 那么, 在正方形 K_n 中心的第 $n+1$ 级开正方形 (也在圆盘 J 之内) 就完全不含 A 的点. 在这个开正方形内作出内切圆盘 V, 该圆盘在圆盘 J 内, 且不含 A 中的点. 于是, A 是平面上的疏集.

用类似的方法证明 A 无孤立点: 设 $M_0 \in A$, 作 M_0 的任意邻域 J, 再作一个包含 M_0 且完全包含于 J 中的闭正方形 K_n (参看图 24). 那么, 这个正方形的边界交于集 A 且也含于 J 中. 因此, M_0 不是孤立点.

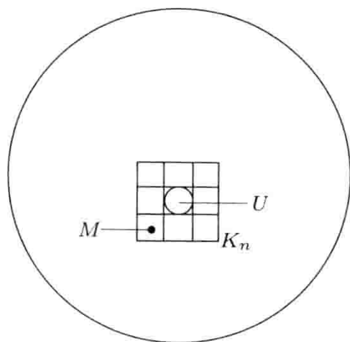


图 23

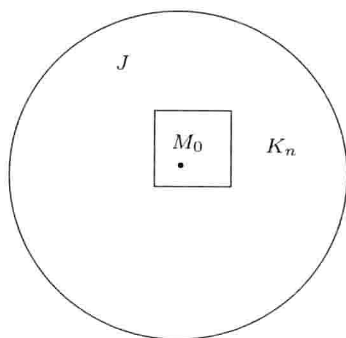


图 24

因为 A 是闭的, 且不含孤立点, 所以 A 是完备集.

注 A 的余集 A^c 的测度等于一切被去掉的各级正方形的面积之和, 即是

$$mA^c = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \times 8 + \frac{1}{9^3} \times 8^2 + \cdots + \frac{1}{9^{k+1}} \times 8^k + \cdots = 1,$$

因此, $mA = 0$.

(2) Sierpiński 墓垛

在平面上以下面的方法作集 B : 用直线 $x = 1/3, x = 2/3$; $y = 1/3, y = 2/3$ 分闭正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ 为 9 个相等的正方形, 且毗连于基本正方形顶点的四个闭正方形称为第一级的正方形, 而它们的并用 B_1 记之 (参看图 25). 然后把第一级正方形中的每一个分为 9 个相等的闭正方形, 且它们当中毗连于相应的第一级正方形之顶点者称为第二级的正方形; 所有第二级的 16 个闭正方形之并用 B_2 记之 (参看图 26). 其次, 又分每一个第二级的正方形为 9 个相等的闭正方形, 并

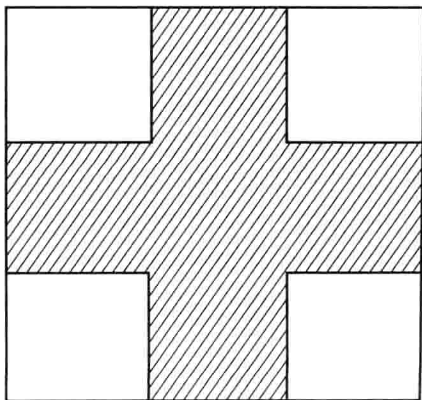


图 25

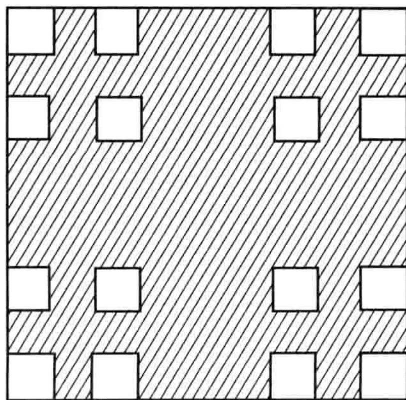


图 26

称毗连于第二级的相应正方形顶点的那些正方形为第三级的正方形; 所有第三级的 64 个闭正方形之并用 B_3 记之, 依此类推. 显然,

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots.$$

一切 B_k 的公共部分称为 "Sierpiński 墓垛", 并用 B 记之: $B = \cap_{k=1}^{\infty} B_k$. 不难证明, B 是完备疏集.

注 B 的余集 B^c 的测度等于所有被去掉的《开十字形》的面积之和, 即是

$$mB^c = \frac{5}{9} + \frac{5}{9^2} \times 4 + \frac{5}{9^3} \times 4^2 + \cdots + \frac{5}{9^{k+1}} \times 4^k + \cdots = 1,$$

因之, $mB = 0$.

(3) Cantor 栉

在 Oxy 平面上由满足下列条件: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \in D$ (这里, D 为 Oy 轴上的区间 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集) 的一切点 $M(x,y)$ 所成之集 E 称为 "Cantor 栉". 不难证明, E 是完备疏集.

注 E 的余集 E^c 的测度等于所有被去掉的矩形的面积之和, 即是

$$mE^c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \times 2 + \frac{1}{3^3} \times 2^2 + \cdots + \frac{1}{3^{k+1}} \times 2^k + \cdots = 1,$$

因之, $mE = 0$.

9. 任给实数 a $(0 < a < 1)$, 可在 $[0,1] \times [0,1]$ 中构造一个完备疏集 E, 满足 $mE = a$.

任取其项为递减的正项级数 $a_1 + a_2 + \cdots$, 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - a.$$

在单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 中引两条垂直直线和两条平行直线, 使被这些直线截去的十字形的面积等于 a_1, 且去掉这个十字形后余下的 4 个矩形是闭正方形 (参看图 25). 称这些闭正方形为第一级正方形, 用 P_1 表其并集 (P_1 是闭集). 在 4 个第一级正方形的每一个中引两条垂直直线和两条平行直线, 使被这些直线截下的每个十字形的面积等于 $a_2/4$, 且在第一级正方形的每一个中去掉十字形后余下的是 4 个闭正方形. 称这些余下的正方形为第二级的正方形, 它们的并用 P_2 表示, 二级正方形的个数等于 4^2 (参看图 26). 一般地, 设 k 级正方形已作出 (个数等于 4^k), 那么, 后一级正方形可以这样作出: 在 k 级正方形的每一个中引两条垂直直线和两条平行直线, 使被这些直线截下的十字形的面积等于 $a_{k+1}/4^k$, 且去掉这些十字形后余下的矩形是闭正方形, 称它们是第 $k+1$ 级正方形, 其并表为 P_{k+1}, 所有 $k+1$ 级正方形的个数等于 4^{k+1}. 如果取一切 P_k 之交, 那么我们就得到一个完备疏集. 最后, 一切被去掉的十字形的面积之和为

$$a_1 + 4 \times \frac{a_2}{4} + 4^2 \times \frac{a_3}{4^2} + \cdots + 4^k \times \frac{a_{k+1}}{4^k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 - a,$$

因之, 被作出的完备疏集的测度为 a.

注 我们还可以作出坐标均为无理数且具有正测度的完备疏集. 为此, 在 Ox 轴的区间 $[\alpha,\beta]$ (α,β 均为无理数且 $\alpha<\beta$) 中作一个仅由无理数组成而测度为 a $(0<a<\beta-\alpha)$ 的完备疏集 E_x (参看第一章例 32), 在 Oy 轴的区间 $[\alpha,\beta]$ 中也作一个这样的集 E_y. 令

$$E=E_x\times E_y=\{(x,y):x\in E_x,y\in E_y\},$$

则 E 也是完备疏集, 且 (参看 [6], pp.51—54)

$$mE=mE_x\times mE_y=a^2.$$

10*. Sierpiński 连续点集

下面两个极其出色的连续点集是由 Sierpiński 所创造.

(1) Sierpiński 第一连续点集

在等边三角形的每一边上取一中点, 然后连接这些中点而把此等边三角形划分为四个相等的三角形. 把中间三角形的内部去掉, 而在其余的三个闭三角形 (我们称其为第一级的三角形) 重复同样的手续: 每个这样的三角形各被分成四个相等的等边三角形, 并去掉其各个中间三角形的内部, 这样就得到九个二级闭三角形. 以下准此.

我们用 π_n 表示所有的 3^n 个 n 级三角形之并, 所有这些三角形既是闭的, 那么其并 π_n 就是 R^2 中的一个紧集. 易见, 这个紧集是连通的 (它的任意两点能用位于 π_n 上的折线所连接). 因为 $\pi_n\supset\pi_{n+1}$, 所以一切 π_n 之交 S 是一个连续点集 (参看 [21], 中译本 p.252). 称此连续点集为 "Sierpiński 第一连续点集" 或 "Sierpiński 曲线". 为了认清这个 "曲线" 的形状, 我们在图 27 上画出了连续点集 π_4 的图样. 在连续点集 S 上存在有到处稠密的无限折线 L—— 即是我们作图中的一切三角形

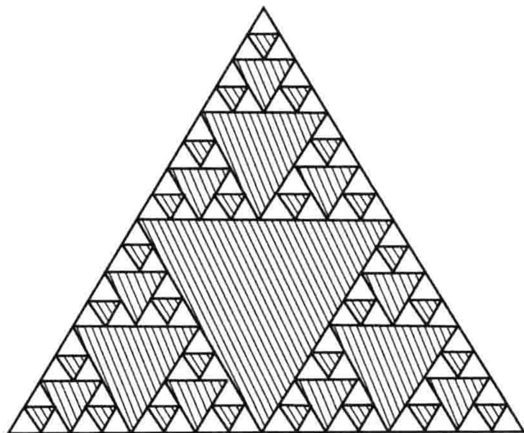


图 27

的周边之和. L 看作是周边 L_n (这是级的数目 $\leqslant n$ 的一切三角形的周边之和) 的上升序列之和, 就容易看出它是连通的. 然而, L 远远没有历尽整个的连续点集 S: 在 S 上还有不在我们任何三角形之周边上的非可数的点集.

(2) Sierpiński 第二连续点集

"Sierpiński 第二连续点集", 即 "Sierpiński 地毯", 其构造方法可参看例 8.

注 上述两个连续点集在平面上都是无处稠密的.

11. 平面上的一个 (L) 可测集, 它在坐标轴上的射影都不是 (L) 可测的.

设 A 是 $[0,1]$ 中的一个非 (L) 可测集, 令

$$E = (A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times A) \subset [0,1] \times [0,1],$$

则 $A \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times A$ 均为平面上的 (L) 可测集, 从而 E 也是平面上的 (L) 可测集, 且其平面测度为 0. 然而, E 在坐标轴上的射影均为非 (L) 可测集.

12. 单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 内的一个子集, 它在 $[0,1] \times [0,1]$ 内稠密, 但在任一平行于坐标轴的直线上都是无处稠密的.

设 E 是正方形 $I = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 中的这样的点 (x,y) 所成之集, 数 x, y 可表成有限位数的二进位小数表达式, 而且 x 与 y 的二进位小数表达式中的有限位数是相同的. 于是, 如果 x' 可表成有限位数的二进位小数表达式, 那么, 在直线 $x = x'$ 上只有有限多个点 $(x', y') \in E$. 同理, 如果 y' 可表成有限位数的二进位小数表达式, 那么, 在直线 $y = y'$ 上也只有有限多个点 $(x', y') \in E$. 由此可知, E 与每一条平行于坐标轴的直线 $x = x'$ 之交 $E_{x'} = \{y' : (x', y') \in E\}$ 和 $y = y'$ 之交 $E_{y'} = \{x' : (x', y') \in E\}$ 分别在直线 $x = x'$ 和 $y = y'$ 上是无处稠密的.

兹证, E 在正方形 I 内是稠密的. 为此, 我们考察直线 $y = x + a$, 其中 a 代表正的或负的有限二进位小数表达式. 于是, 对于有限二进位小数表达式中位数大于 a 的位数的那些 x, 由等式 $y = x + a$ 可知, y 与 x 有相同的位数, 从而 $(x, y) \in E$. 因此, E 与 $y = x + a$ 的交口在 I 与 $y = x + a$ 的交口中是稠密的. 由于 a 的全体在区间 $[-1, 1]$ 中是稠密的, 因而 E 在 I 中也是稠密的.

这个例子是由 Pringsheim [131] 作出的.

13*. 单位正方形 $I = [0,1] \times [0,1]$ 的一个子集 A 在 I 内稠密, 而且与 I 相交的每一条铅直或水平直线恰好交 A 于一点.

实际上, 所要寻求的是一个一一对应 f, 它的定义域和值域都是 $[0,1]$, 其图形在 I 内稠密. 开头, 我们分阶段地对 $x \in (0,1] \cap \mathscr{D}$ 定义函数 $f(x)$, 其中 $\mathscr{D}$ 代表全体有理数. 设 $B = ((0,1] \cap \mathscr{D}) \times ((0,1] \cap \mathscr{D})$ 的点已被排成序列:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$$

(这是允许的, 因为坐标为有理数的点的全体成一可数集). 先定义 $f(x_1) = y_1$. 第一阶段, 我们用铅直和水平的二等分线将 B 分成四个不相交的部分:

$$\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\bigcap\mathscr{D}\right)\times\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\bigcap\mathscr{D}\right),\quad \left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\bigcap\mathscr{D}\right)\times\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\bigcap\mathscr{D}\right),\quad \cdots,$$

并且按照任意的次序将这四部分记作: B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}. 以 (x_{11}, y_{11}) 表示序列 $\{(x_n、y_n)\}$ 中第一个属于 B_{11} 而又 $x_{11} \neq x_1$ 且 $y_{11} \neq y^1$ 的点, 设 $f(x_{11}) = y_{11}$. 以 (x_{12}, y_{12}) 表示序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 中第一个属于 B_{12}, 而又能使 x_{12} 与 x_1 和 x_{11} 都不相同, y_{12} 与 y_1 和 y_{11} 都不相同的点, 设 $f(x_{12}) = y_{12}$. 当已经用同样的方法定义 $f(x_{13}) = y_{13}$ 之后, 我们用 (x_{14}, y_{14}) 表示序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 中第一个属于 B_{14}, 而又能使 x_{14} 与 x_1, x_{11}, x_{12} 和 x_{13} 都不相同, y_{14} 与 y_1, y_{11}, y_{12} 和 y_{13} 都不相同的点, 定义 $f(x_{14}) = y_{14}$. 这就完成了第一阶段. 第二阶段也一样, 只不过是用更多的铅直的和水平的二等分线将 B 分成 $16 = 4^2$ 部分: $B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{24^2}$, 在这些部分的每一个, 我们依次在一个尚未在其定义域中的有理点定义 f, 它所取的值是尚未在其值域中的有理点. 如果这个程序无限地继续进行, 第 n 阶段将 B 分成 4^n 个全等的部分, 得到的函数 f 在 $(0,1] \cap \mathscr{D}$ 上具有指定的性质. 最后, 我们把 f 的定义域和值域扩张到 $[0,1]$, 办法是对 $x \in [0,1] \setminus ((0,1] \cap \mathscr{D})$ 定义 $f(x) = x$.

例 13 是例 12 的改进.

14*. 平面内的一个稠密集, 它不含有三个共线的点.

设 $z_1, z_2, \cdots$ 是复平面内的代数点 (即实部与虚部都是代数数的点) 所成的可数稠密集, S 是 $s_1, s_2, \cdots$ 所成之集, $\{s_n\}$ 的定义如下: $s_1 = z_1, s_2 = z_2$, 当 $n > 2$ 时, 令

$$s_n = z_n + 2^{-n} e^{2\pi i / f(n)},$$

这里, $f(n)$ 是如此的最小正整数, 使得 s_n 同 $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ 中任何两个点都不共线. 容易看出, $f(n)$ 必定存在. 于是, 集 S 中任何三个点都不共线.

因为 $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$ 在平面内稠密, 且

$$|s_n - z_n| = 2^{-n},$$

所以 S 在平面内也稠密.

这个例子是由 Leo Moser [104] 作出的.

15*. 与任一直线至多有两个公共点的不可测平面集.

这个例子属于 Sierpiński [151]. 为构造这个例子, 我们先要证明下面的引理:

引理 任给一个方向, 作平行线截 R^2 中的闭集 F, 若所有平行线与 F 之交在 R' 中的测度是 0 的话, 则 F 是 R^2 中的零测度集.

证 不妨设这个方向是 Oy 轴, F 位于 $[0,1] \times [0,1]$ 里. 只要证明, 过点 x 的垂直线截 F, 截口 $F_x = \{y : (x, y) \in F\}$ 在 R' 中的测度永远小于 σ 时, F 在 R^2

中的测度必小于 σ. 为此, 任取一点 $x \in [0,1]$, 作垂直线 xx' (x' 位于直线 $y=1$ 上, 以下带撇的都是如此). 因为 F 是闭集, 且 $mF_x < \sigma$, 所以在线段 xx' 上存在有限个区间, 这些区间不含 F 中的点, 而且它们的测度之和大于 $1-\sigma$. 以这些小区间为高向左右伸张, 作小矩形, 使不含 F 的点. 由于这种小矩形只有有限个, 因而在点 x 的左右两侧, 存在点 x_1, x_2, 过 x_1, x_2 作垂直线 x_1x_1', x_2x_2', 使 x_1x_1', x_2x_2' 穿过被 xx' 通过的小矩形的内部. 于是, 找到了含 x 的小区间 (x_1, x_2), 在矩形 $x_1x_2x_2'x_1'$ 里有矩形的并, 它不与 F 相交, 且其面积大于 $(x_2-x_1)(1-\sigma)$.

根据 Borel 有限覆盖定理, 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 里, 可以找到有限个 $\{(x_1, x_2)\}$ 适合上述条件, 并且覆盖了 $0 \leqslant x \leqslant 1$. 以这些区间的端点分 $0 \leqslant x \leqslant 1$. 在每两个分点之间的小线段上, 它的长若是 l, 它的上方有一些与 F 不相交的矩形, 则据前面的论述, 其面积之和大于 $l(1-\sigma)$. 把这些矩形的面积加在一起, 则与 F 不相交的矩形总面积大于

$$\sum_i l_i(1-\sigma) = 1-\sigma.$$

由此可知, $mF < \sigma$. 引理证毕.

现在再来构造具有所需性质的不可测集.

如所周知, $[0,1]\times[0,1]$ 里具有正测度的闭集的类, 其势是 $\aleph$, 它与正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的势一样. 根据 Zermlo 公理, 可以把这个闭集的类写成

$$F_1, F_2, \cdots, F_\omega, F_{\omega+1}, \cdots, F_\alpha, \cdots \quad (\alpha < \Omega_0),$$

这里, Ω_0 是 $\aleph$ 所对应的最小超限数. 于是, $W_{\Omega_0} = \{\alpha : \alpha < \Omega_0\}$ 的势也是 $\aleph$, 从而它与正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 成一一对应:

$$p_1, p_2, \cdots, p_\omega, p_{\omega+1}, \cdots, p_\alpha \cdots \quad (\alpha < \Omega_0). \tag{1}$$

(1) 的点第一个在 F_1 的, 叫作 q_1.

取常数 $\alpha < \Omega_0$, 设点 q_ξ $(\xi < \alpha)$ 业已取定. 令 Q_α 是连一切 q_μ, q_ν 的直线所成之集, 但 $\mu < \nu < \alpha$. 因为 $\alpha < \Omega_0$, 所以 Q_α 的势小于 $\aleph$. 因之, 有方向 D_0 不平行于 Q_α 中的任何直线. 由引理可知, 必有直线 D 平行于 D_0, 使得 $F_\alpha \cap D$ 是 R^1 中的正测度集. 注意, D 与 Q_α 的交点的势小于 $\aleph$, 但因 $m(F_\alpha \cap D) > 0$, 所以 $F_\alpha \cap D$ 的势是 $\aleph$. 从而 $F_\alpha \cap D$ 有点不属于 Q_α.

也就是说, 我们证明了 F_α 有点不在 $q_\mu q_\nu$ 上, $\mu < \nu < \alpha$. 令 q_α 是 (1) 中第一个这样的点. 根据超限归纳法, 得点集

$$E : q_1, q_2, \cdots, q_\omega, q_{\omega+1}, \cdots, q_\alpha, \cdots \quad (\alpha < \Omega_0).$$

每个 F_α 与 E 至少有一个公共点, E 的任意三个点不在一条直线上. 因此, 任何直线截 E, 至多得出两个点.

兹证 E 不可测.

因为对每个 F_α, 都有 $E \cap F_\alpha \neq \varnothing$, 所以 E 的余集 (对正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 而言) 不包含具有正测度的闭集, 从而其内测度等于 0. 于是, E 的外测度大于 0. 另

一方面, E 的内测度等于 0, 因为倘若不然, E 将含有正测度的闭集, 这与任何直线截 E 至多得出两点相冲突.

既然 $m^*E > 0, m_*E = 0$, 可见 E 并不可测.

16*. 区间 $[0,1]$ 到正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的一个映射.

如果 $t \in [0,1)$, 设 $0.t_1t_2t_3\cdots$ 是 t 的二进位小数展开式, 为了避免含糊不清, 我们假定这个展开式含有无穷多个等于 0 的二进位数字. 在映射 f 之下, t 在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内的像点 (x,y) 定义为

$$x = 0.t_1t_3t_5\cdots, \quad y = 0.t_2t_4t_6\cdots.$$

最后, 定义 $f(1)=(1,1)$. 不难看出, 在映射 f 之下, $[0,1]$ 的像集是 $[0,1]\times[0,1]$, 而且 f 是一个多对一的映射. 例如, $(0.1, 0.1)$ 就恰好是三个不同的点 $0.11, 0.100101010101\cdots$ 和 $0.011010101\cdots$ 的像点.

映射 f 是不连续的. 例如, 设 $\{t_n\}$ 为序列 $0.0011, 0.001111, 0.00111111, 0.0011111111, \cdots$, 又如 $(x_n, y_n) = f(t_n)$, 于是序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 一样, 都是

$$0.01, 0.011, 0.0111, 0.01111, \cdots.$$

可是, $t_n \to 0.01, (x_n, y_n) \to (0.1, 0.1)\ (n\to\infty)$, 从而 $f(0.01) = (0.0, 0.1) \neq (0.1, 0.1)$. 也就是说, $\lim_{n\to\infty} f(t_n) \neq f(\lim_{n\to\infty} t_n)$.

17. 充实空间的连续曲线.

所谓充实空间的连续曲线是指一条曲线, 它位于一个维数大于一的 Euclid 空间并且在该空间内有一个非空的内部 (它不是无处稠密的). 1890 年意大利数学家 Peano 的第一个充实空间的连续曲线曾使数学界大吃一惊. 我们在此介绍的是由法国数学家 Lebesgue 给出的, 一个充实单位正方形 $I=[0,1]\times[0,1]$ 的曲线. Lebesgue 给出的例子的优点, 特别是在于它能推广到任意维数的情形, 并能导致 Cantor 完备集 C 在任意维数的立方体上的或甚至 Hilbert 砖形[①]上的连续映射.

Lebesgue 的构造法如次:

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, 如所周知, C 的点 t, 当其表为无限三进位小数

$$t = \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3^2} + \cdots + \frac{\theta_n}{3^n} + \cdots \tag{1}$$

的形式时, 其特性是: θ_n 或者是 0, 或者是 2, 从而能够写成 $\theta_n = 2t_n$ 的形式, 这里的 t_n 或者是 0, 或者是 1. 由于这种情况, 我们可以把 (1) 改写为

$$t = 2\cdot\left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \cdots + \frac{t_n}{3^n} + \cdots\right) \tag{2}$$

的形式. 对集 C 的每个点 (2), 使与平面 R^2 中的单位正方形 $I=[0,1]\times[0,1]$ 的

[①] Hilbert 空间 H 的砖形 Q, 是由一切点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in H$ 所组成, 这些点适合条件 $0 \leqslant x_n \leqslant 1/2^n\ (n=1,2,\cdots)$.

点 (x_1, x_2) 相对应:

$$x_1 = \varphi_1(t) = \frac{t_1}{2} + \frac{t_3}{2^2} + \frac{t_5}{2^3} + \cdots + \frac{t_{2n-1}}{2^n} + \cdots,$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \frac{t_2}{2} + \frac{t_4}{2^2} + \frac{t_6}{2^3} + \cdots + \frac{t_{2n}}{2^n} + \cdots.$$

这样, 我们就得到了集 $C \subset [0,1]$ 到单位正方形 $I = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ 的一个映射 f.

兹证, f 是映 C 到 I 上的.

事实上, 假设 $x = (x_1, x_2)$ 是正方形 I 中的任意一点, 其坐标写成二进位小数展开式

$$x_1 = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \cdots + \frac{p_n}{2^n} + \cdots, \quad p_n = 0 \text{ 或 } 1,$$

$$x_2 = \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2^2} + \cdots + \frac{q_n}{2^n} + \cdots, \quad q_n = 0 \text{ 或 } 1.$$

于是, 在映射 f 之下, x 所对应的是由分解式 (2) 所定义的集 C 之点在这分解式中奇数位是一连串的 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$, 而偶数位是一连串 $q_1, q_2, \cdots, q_n \cdots$. 因此, f 就是集 C 到整个正方形 I 上的映射.

再证, 映射 f 是连续的.

事实上, 集 C 的两点

$$t' = 2\left(\frac{t'_1}{3} + \frac{t'_2}{3^2} + \cdots + \frac{t'_n}{3^n} + \cdots\right)$$

与

$$t'' = 2\left(\frac{t''_1}{3} + \frac{t''_2}{3^2} + \cdots + \frac{t''_n}{3^n} + \cdots\right),$$

如果 $t'_n \neq t''_n$, 那么就有

$$|t' - t''| \geqslant 1/3^n.$$

因此, 如果令

$$t^{(k)} = 2\left(\frac{t_1^{(k)}}{3} + \frac{t_2^{(k)}}{3^2} + \cdots + \frac{t_n^{(k)}}{3^n} + \cdots\right),$$

$t^{(k)} \in C$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 而且点列 $\{t^{(k)}\}$ 收敛于

$$t = 2\left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \cdots + \frac{t_n}{3^n} + \cdots\right),$$

那么对任意的 n, 存在正整数 k_n, 当 $k > k_n$ 时, 就有

$$t_1^{(k)} = t_1, \quad t_2^{(k)} = t_2, \quad \cdots, \quad t_n^{(k)} = t_n.$$

由此推知, 当 k 趋向无穷时, $x_1^{(k)} = \varphi_1(t^{(k)})$ 与 $x_2^{(k)} = \varphi_2(t^{(k)})$ 分别趋向于 $x_1 = \varphi_1(t)$ 与 $x_2 = \varphi_2(t)$, 这就证明了函数 φ_1 与 φ_2 的连续性, 也就是, 映射 f 的连续性.

最后, 我们要把 φ_1 与 φ_2 的定义域扩张到整个区间 $[0,1]$ 上. 为此, 设 Cantor

三分集 C 的邻接区间为 (α_i,β_i), $i=1,2,\cdots$, 在每个邻接区间 (α_i,β_i) 上, 令

$$\varphi_1(t)=\frac{\beta_i-t}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_1(\alpha_i)+\frac{t-\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_1(\beta_i),$$
$$\varphi_2(t)=\frac{\beta_i-t}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_2(\alpha_i)+\frac{t-\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}\varphi_2(\beta_i).$$

这样, 就得到定义在整个区间 $[0,1]$ 上的连续函数 (它们仍用 φ_1,φ_2 表示). 对每点 $t\in[0,1]$, 像从前那样, 假定 $x_1=\varphi_1(t)$ 与 $x_2=\varphi_2(t)$ 的时候, 就得到区间 $[0,1]$ 到单位正方形 I 上的连续映射 f (这个映射是在整个单位正方形上的, 因为我们已经见到, 甚至有 $f(C)=I$).

当我们将序列 $\{t_n\}$ 分解成三个或多个部分序列时, 也可获得区间 $[0,1]$ 到三维或多维的正方体上的连续映射, 甚至直到 $\aleph_0$ 维 ($\aleph_0$ 为可数集的势). 例如, 函数

$$x_1=\varphi_1(t)=\frac{t_1}{2}+\frac{t_3}{2^2}+\frac{t_5}{2^3}+\cdots,$$
$$x_2=\varphi_2(t)=\frac{t_2}{2}+\frac{t_6}{2^2}+\frac{t_{10}}{2^3}+\cdots,$$
$$x_3=\varphi_3(t)=\frac{t_4}{2}+\frac{t_{12}}{2^2}+\frac{t_{20}}{2^3}+\cdots,$$
$$\cdots$$

定义在 Cantor 三分集 C 上并如上扩张到区间 $[0,1]$ 后, $x_n=\varphi_n(t)$ 都是 $[0,1]$ 上的连续函数, 且各自独立地遍历区间 $0\leqslant x_n\leqslant 1$ 所定义的 $\aleph_0$ 维正方体 W.

注 Peano 曲线使维数概念遭受了第二次的打击; 正方形除了已知可以是区间的一对一的映射之外 (由于它们的势相同), 现在又知它也可以是区间的连续映射. 直到要提出对同胚性的要求时, 才使维数概念重行恢复它应有的地位; 事实上, 成立下列维数不变性的定理, 此定理的最一般形式首先由 Brouwer 所证明 (参看 [89], 中译本 p.221):

欧氏空间 R^m 中一集 A 与欧氏空间 R^n 中一集 B, 当 $n>m$ 且 B 具有内点时, 二者决不同胚.

根据这一定理, 从区间到正方体上的连续映射都不可能是一对一的.

18. 充实空间的连续曲线的简单例题.

第一例 我们在此介绍的充实空间的连续曲线的简单例题, 它归功于 Schoenberg.

设 g 是定义在区间 $[0,2]$ 上的函数:

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 1/3,\ 5/3\leqslant t\leqslant 2,\\ 3t-1, & 1/3\leqslant t\leqslant 2/3,\\ 1, & 2/3\leqslant t\leqslant 4/3,\\ -3t+5, & 4/3\leqslant t\leqslant 5/3.\end{cases}$$

规定

$$g(t+2)=g(t).$$

把 g 的定义域扩张到整个 R^1. g 在 R^1 上连续, 周期是 2.

现在, 由

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-2}t)}{2^n},\quad y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(3^{2n-1}t)}{2^n}$$

定义两个函数 x,y. 由 Weierstrass M 判别法, 这两个级数都在 R^1 上一致收敛; 由于这两个级数中的每一项都是连续的, 因此, 函数 x,y 都在 R^1 上连续.

设 $z=(x,y)$, 以 G 表示区间 $[0,1]$ 在 z 之下的像. 我们要证明 $G=[0,1]\times[0,1]$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1$, 显然, 对每个 t, $0\leqslant x(t)\leqslant 1$, $0\leqslant y(t)\leqslant 1$. 因此 G 是 $[0,1]\times[0,1]$ 的子集. 剩下来还要证明 $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$ 时 $(a,b)\in G$. 为此, 我们把 a,b 表示为二进位小数, 即设

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n},$$

其中 a_n 与 b_n 都是 0 或 1. 令

$$c=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n},$$

其中 $c_{2n-1}=a_n$, $c_{2n}=b_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

因为 $2\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}=1$, 所以 $0\leqslant c\leqslant 1$. 我们将证明 $x(c)=a$, $y(c)=b$.

如果我们能证明

$$g(3^k c)=c_{k+1},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

成立, 那么就有

$$g(3^{2n-2}c)=c_{2n-1}=a_n,\quad g(3^{2n-1}c)=c_{2n}=b_n;$$

而这就会使我们得到 $x(c)=a$, $y(c)=b$. 为证 (1), 设

$$3^k c=2\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{3^{n-k}}+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^{n-k}}=(\text{某个偶数})+d_k,$$

其中 $d_k=2\sum_{n=1}^{\infty}c_{n+k}/3^n$. 因为 g 的周期是 2, 故

$$g(3^k c)=g(d_k).$$

当 $c_{k+1}=0$ 时, 有

$$0\leqslant d_k\leqslant 2\sum_{n=2}^{\infty}3^{-n}=1/3,$$

因此 $g(d_k)=0$, (1) 对这种情形成立. 其他要考虑的情形只有 $c_{k+1}=1$. 而此时有

$$2/3\leqslant d_k\leqslant 1,$$

因此 $g(d_k)=1$. 这样, (1) 对各种情形都成立. 证毕.

第二例 下面的构造法属于赵明方 [16].

我们在闭区间 $[0,2]$ 上定义函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3},\\ 6t-2, & \dfrac{1}{3}<t\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1, & \dfrac{1}{2}<t\leqslant \dfrac{5}{6},\\ \lambda t^2+\left(6-\dfrac{11}{6}\lambda\right)t+\dfrac{5}{6}\lambda-4, & \dfrac{5}{6}<t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant \dfrac{4}{3},\\ -3t+6, & \dfrac{4}{3}<t\leqslant 2,\end{cases}$$

其中 λ 为闭区间 $[0,36]$ 上的任一实数. 显然, $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $0\leqslant \varphi(t)\leqslant 2$.

现在我们定义两个函数如下:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{4^{2n-1}}{3}t\right)}{3^n},\quad y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{4^{2n}}{3}t\right)}{3^n}. \tag{2}$$

这两个级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是一致收敛的. 又级数的每一项都是连续的, 故其和函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 也在全数轴上连续.

下面我们证明曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

通过单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的每一点.

首先, 显然有 $0\leqslant x(t)\leqslant 1$, $0\leqslant y(t)\leqslant 1, t\in(-\infty,\infty)$. 设 (a,b) 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的任意一点, 我们要证明存在点 c, 使

$$x(c)=a,\quad y(c)=b. \tag{3}$$

为此, 我们把 a,b 二数用三进位制表出:

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n},\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^n}, \tag{4}$$

其中 a_n,b_n 是 $0,1,2$ 三数中之一.

令 $c=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{4^n}$, 此处 $c_{2n-1}=a_n, c_{2n}=b_n$. 显然, $0\leqslant c\leqslant 1$. 现证 c 满足条件 (3).

把 $4^{k+1}c/3$ 改写为

$$\begin{aligned}\frac{4^{k+1}}{3}c&=\frac{4}{3}\cdot 4^k\cdot c=2\cdot 4^k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{4^n}=2\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{4^{n-k}}+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{c_n}{4^{n-k}}\\&=(\text{某一偶数})+d_k\quad(k=0,1,2,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $d_k = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{4^n}$. 因为 $\varphi(t)$ 是以 2 为周期的函数, 故

$$\varphi\left(\frac{4^{k+1}}{3}c\right) = \varphi(d_k).$$

下面我们证明

$$\varphi\left(\frac{4^{k+1}}{3}c\right) = c_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

若 $c_{k+1} = 0$, 则有 $0 \leqslant d_k \leqslant 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$. 因此, $\varphi(d_k) = 0$, 即此时 (5) 成立.

若 $c_{k+1} = 1$, 则有 $\frac{1}{2} \leqslant d_k \leqslant \frac{1}{2} + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{5}{6}$. 因而 $\varphi(d_k) = 1$, 即 (5) 成立.

若 $c_{k+1} = 2$, 则有 $1 \leqslant d_k \leqslant 1 + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$, 从而有 $\varphi(d_k) = 2$. 由以上三种情况, 我们已证明了 (5) 成立. 从而有

$$\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{4^{2n-1}}{3}c\right) = c_{2n-1} = a_n, \\ \varphi\left(\dfrac{4^{2n}}{3}c\right) = c_{2n} = b_n. \end{cases} \tag{6}$$

由 (2), (4), (6) 可知 (3) 成立, 即

$$x(c) = a, \quad y(c) = b.$$

这样, 我们就证明了曲线 (2) 是充实空间的曲线. 由 λ 在区间 $[0, 86]$ 上的任意性, 也说明了充实空间的曲线是无穷多的.

第三例 下面的构造法属于 Liu Wen [106].

分区间 $[0, 1]$ 为 10 个相等的子区间:

$$\delta_k = [k/10, (k+1)/10], \quad k = 0, 1, \cdots, 9.$$

设 f, g 是区间 $[0, 1]$ 上的实值连续函数, 满足下述条件:

(i)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \delta_1 \cup \delta_3, \\ 1, & t \in \delta_5 \cup \delta_7. \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in \delta_1 \cup \delta_5, \\ 1, & t \in \delta_3 \cup \delta_7. \end{cases}$$

(ii) $f(0) = f(1), g(0) = g(1)$.

然后周期性地扩张 f, g 到 $(-\infty, \infty)$ 上, 我们就得到两个连续的周期函数, 仍分别记作 f, g. 令

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}f(10^{k-1}t), \quad \psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}g(10^{k-1}t).$$

显然, φ 和 ψ 都连续. 易证

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是充实单位正方形的曲线. 事实上, 设 x, y 为 $[0, 1]$ 中的任意实数, 其二进位表示式为

$$x = 0.x_1x_2\cdots x_k\cdots, \text{ 各个 } x_k = 0 \text{ 或 } 1,$$

$$y = 0.y_1y_2\cdots y_k\cdots, \text{ 各个 } y_k = 0 \text{ 或 } 1.$$

令

$$\begin{cases} 1, & x_k = 0 \text{ 且 } y_k = 0, \\ 3, & x_k = 0 \text{ 且 } y_k = 1, \\ 5, & x_k = 1 \text{ 且 } y_k = 0, \\ 7, & x_k = 1 \text{ 且 } y_k = 1. \end{cases}$$

设 t 的十进位表示式为

$$t = 0.t_1 t_2 \cdots t_k \cdots,$$

由定义直接推知 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 成立, 故曲线

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

通过单位正方形的每一点.

19*. R^3 内的一条简单弧, 它在平面上的投影成为一个三角形[①].

第一步: 先作出区间 $[0,1]$ 到等腰直角三角形上的连续映射.

取闭区间 $I=[0,1]$ 及闭二等边直角三角形 $\triangle$, 以下区间与三角形都是闭的, 不再一一重复. 将 I 二等分为 $I_0 = [0,1/2], I_1 = [1/2,1]$. 区间 $[0,1]$ 的这个分解叫作第一级的分解, 而区间 $[0,1/2]$ 与 $[1/2,1]$ 叫作第一级的区间. 如将每个第一级的区间各个二等分, 即得到四个第二级的区间 $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$, 这形成了区间 $[0,1]$ 的第二级的分解, 以下类推. n 级的分解是由 2^n 个区间 $I_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_1, i_2, \cdots, i_n = 0$ 或 $1)$ 所组成, 其各个之长都是 $1/2^n$.

仿此, 自二等边直角三角形 $\triangle$ 的直角顶点作垂线, 把它分解为两个相等的二等边直角三角形 $\triangle_0$ 与 $\triangle_1$. 这就是第一级的三角形; 它们形成了最初三角形 $\triangle$ 的第一级分解. 如前法, 分 $\triangle_0$ 为 $\triangle_{00}, \triangle_{01}$; 分 $\triangle_1$ 为 $\triangle_{10}, \triangle_{11}$. 一般说来, 对任意 n 得到 2^n 个 n 级三角形 $\triangle_{i_1 i_2 \cdots, i_n}(i_1, i_2, \cdots, i_n = 0$ 或 $1)$.

由我们的作法可见, 恒有 $I_{i_1 \cdots i_n} \supset I_{i_1 \cdots i_n i_{n+1}}$ 以及 $\triangle_{i_1 \cdots i_n} \supset \triangle_{i_1 \cdots i_n i_{n+1}}$.

其次, 因为 $I_{i_1 \cdots i_n}$ 的长等于 $1/2^n$, 所以当 n 趋向于无穷时其长趋近于零. 也容易看出, 三角形 $\triangle_{i_1 \cdots i_n}$ 的直径当 n 趋向无穷时也趋近于零. 由此可见:

(i) 如果对任意的 n, 我们用 P_n 表示一个 n 级三角形, 或者表示两个互相毗连的 n 级三角形之并, 则当 n 趋向无穷时, P_n 的直径趋近于零.

我们还需要这种作法的下列性质, 这是不难证明的 (用对照 n 的归纳法):

(ii) 如果两个 n 级区间 $I_{i_1 \cdots i_n}$ 与 $I_{j_1 \cdots j_n}$ 具有共同端点, 则三角形 $\triangle_{i_1 \cdots i_n}$ 与 $\triangle_{j_1 \cdots j_n}$ 以一共同边互相毗连.

现在假设 t 是区间 $[0,1]$ 的任一点, 对每个级的数目 n, 或者有包含点 t 在内的唯一的 n 级区间 $I_{i_1 \cdots i_n}$, 或者就有以点 t 为其共同端点的两个区间 $I_{i_1 \cdots i_n}$ 与

① 这个简单弧能够充当完全不漏雨的 “屋顶”.

$I_{j_1\cdots j_n}$. 在前一场合, 用 $P_n(t)$ 表示三角形 $\triangle_{i_1\cdots i_n}$, 在后一场合, 用 $P_n(t)$ 表示两个三角形 $\triangle_{i_1\cdots i_n}$ 与 $\triangle_{j_1\cdots j_n}$ 之并, 这时由 (ii) 知其互相毗连. 容易看出

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \cdots \supset P_n(t) \supset \cdots, \tag{1}$$

并且由 (i) 可知, 一切 $P_n(t)$ 之交是由唯一的点而成, 我们记其为 $f(t)$.

这样一来, 就得到了区间 $[0,1]$ 到三角形 $\triangle$ 内的映射.

我们首先证明, 这个映射是在整个三角形 $\triangle$ 上的映射. 事实上. 假设 x 是三角形 $\triangle$ 的任一固定点. 试取我们的三角形的任何一个序列

$$\triangle_{i_1} \supset \triangle_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \triangle_{i_1\cdots i_n} \supset \cdots, \tag{2}$$

但有一个条件, 即 x 含于此序列的每个三角形 $\triangle_{i_1\cdots i_n}$ 之间 (对某些点 x, 这样的序列是唯一确定的, 但对某些点则不然). 序列 (2) 对应着序列

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset I_{i_1\cdots i_n} \supset \cdots, \tag{3}$$

这个序列定义唯一的点 $t \in [0,1]$, 此点即是一切区间 (3) 的交点, 并且由我们的作法容易看出, 对任意的 n 必有

$$\triangle_{i_1\cdots i_n} \subset P_n(t). \tag{4}$$

由于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_{i_1\cdots i_n} = x,$$

因此, 据 (4) 以及 $\cap_{n=1}^{\infty} P_n(t)$ 仅由一点组成这一事实, 就能推知, $x = \cap_{n=1}^{\infty} P_n(t)$, 即 $x = f(t)$.

最后, 我们要证明映射 f 在任意点 $t_0 \in [0,1]$ 都连续. 假设

$$x_0 = f(t_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(t_0),$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在如此的 n, 使

$$P_n(t_0) \subset U(x_0, \varepsilon),$$

这里, $U(x_0,\varepsilon)$ 代表以 x_0 为中心, ε 为半径的开园盘. 我们选出此 n, 于是点 t_0 或者属于唯一的区间 $I_{i_1\cdots i_n}$, 或者就属于两个 n 级区间 $I_{i_1\cdots i_n}$ 与 $I_{j_1\cdots j_n}$. 在前一场合, 假定 $I'_n = I_{i_1\cdots i_n}$, 在后一场合, 用 I'_n 表示形成两个区间 $I_{i_1\cdots i_n}$ 与 $I_{j_1\cdots j_n}$ 之并的那个区间, 并用 η 表示自 t_0 至区间 I'_n 最近端点的距离. 这时对与 t_0 之距离小于 η 的一切 $t \in [0,1]$, 将有 $P_n(t) \subset P_n(t_0)$, 这就等于说

$$|f(t_0) - f(t)| < \varepsilon.$$

得所欲证.

第二步: 作出 R^3 中具有所需性质的简单弧.

在三维空间 $Ox_1x_2x_3$ 的平面 $x_3 = 0$ 上取二等边直角三角形 $\triangle$, 并使区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 连续地映射于其上 (参看第一步的结论). 我们把这个映射 f 写成两个连续函数

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t)$$

的形式, 其中 $x_1=\varphi_1(t)$ 与 $x_2=\varphi_2(t)$ 是三角形 $\triangle$ 的点 $x=f(t)$ 的两个坐标.

如对区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的点 t, 使三维空间中具有坐标 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t),x_3=t$ 的点 x 与之对应, 这样就得到区间 $[0,1]$ 到某简单弧上的同胚映射 (曲线 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t),x_3=t$ 是简单弧, 因为当 $t_1\neq t_2$ 时, $(\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_1),t_1)\neq(\varphi_1(t_2),\varphi_2(t_2),t_2)$). 此简单弧在平面 $x_3=0$ 上的投影就是三角形 $\triangle$.

利用第一步的结论而构造具有所需性质的简单弧, 这最初是由 Лузин 所作的.

20. $[0,1]$ **到** $[0,1]$ **上的一个连续映射, 每个值取的次数不可数.**

例 17 和例 18 的充实空间曲线的每个参数函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都具有这个性质.

21. Cantor 曲线、Jordan 曲线和平面上连接区域的边界, 这三个概念两两相异.

关于平面曲线, 除 Jordan 的定义外, 常用的尚有下面两种定义: 其一是, 任何一个没有内点的连续点集都叫作 Cantor 曲线; 另一是, 连接区域的边界叫作平面曲线. 我们将指出, 这三种平面曲线的概念两两相异.

(i) 一条 Jordan 曲线, 它既不是 Cantor 曲线, 也不是区域的边界.

例 17 和例 18 中的充实空间的连续曲线是 Jordan 曲线, 由于它有内点, 因而它既不是 Cantor 曲线, 也不是区域的边界.

(ii) 一条 Cantor 曲线, 它不是 Jordan 曲线.

当 $-1\leqslant x<0,\ 0<x\leqslant 1$ 时, 令

$$y=\sin(1/x);$$

而当 $x=0$ 时, 规定 y 是 Oy 轴上的闭区间 $[-1,1]$.

易见, 适合上述条件的 (x,y) 的全体所成之集 M 是一个没有内点的闭集.

兹证, M 是一个连通的点集. 事实上, 假如不然, 那么 M 就可以分解为两个闭集 M_1 与 M_2 的并集:

$$M=M_1\cup M_2,\quad M_1\cap M_2=\varnothing,\quad M_1\neq\varnothing,\quad M_2\neq\varnothing.$$

设 $x_1>0,(x_1,y)\in M_1$, 那么当 $|h|$ 甚小时, 一切点

$$(x_1+h,\sin 1/(x_1+h))$$

都属于 M_1, 所以在 y 轴右方的, M 中的一切点都属于 M_1; 同样可证 M 的点在 y 轴左方的话, 它必属于 M_2. M 在 y 轴上的一切点:

$$x=0,\quad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

都是 M_1 的聚点, 也是 M_2 的聚点, 所以它们都属于 $M_1\cap M_2$, 这是矛盾的. 因此, M 是一个没有内点的连续点集, 即 M 是一条 Cantor 曲线.

兹证, M 不是 Jordan 曲线. 事实上, 假如 M 是 Jordan 曲线, 那么就应该有连续函数 $x=\varphi(t),y=\psi(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$, M 是点 $(\varphi(t),\psi(t))$ 的全体. 假如 $[a,t_0]$ 对应于 M 中 $x<0$ 的一切点, $[t_1,b]$ 对应于 M 中 $x>0$ 的一切点. 当 t 小于 t_0 而趋向于 t_0 和 t 大于 t_1 而趋向于 t_1 时, 只得着两个点 $(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ 和 $(\varphi(t_1),\psi(t_1))$,

不成一个区间 $[-1,1]$, 此为矛盾. 因此, M 不是 Jordan 曲线.

(iii) 一个区域的边界, 它不是 Jordan 曲线.

设有平面区域 $G, (x,y)$ 是 G 中任意一点, G 含有三种点:

第一种点: $0 < x < 1, \sin(1/x) < y < 2$;

第二种点: $x = 0, 1 < y < 2$;

第三种点: $-1 < x < 0, -1 < y < 2$.

G 的边界 c 含有曲线 $y = \sin(1/x)$ $(0 < x \leqslant 1)$ 和五直线段:

$x = 1, \sin 1 \leqslant y \leqslant 2$; $-1 \leqslant x \leqslant 1, y = 2$;

$x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 2$; $-1 \leqslant x < 0$, $y = -1$;

$x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

易见, c 不是 Jordan 曲线.

(iv) 一条 Cantor 曲线, 它不是某个区域的边界.

我们从一个正方形内去掉可数多个相互分离的开圆盘, 它们是在这正方形内处处稠密地分布着, 并且这些圆盘的圆周是互不相交也不和正方形的边相交 (参看图 28), 则正方形的边界及内部的余留部分, 便是一条 Cantor 曲线. 然而, 它绝非是某个区域的边界, 也不是 Jordan 曲线.

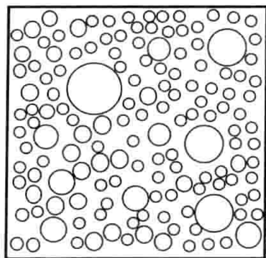


图 28

例 10 中的 Sierpiński 连续点集都是 Cantor 曲线, 它们不是某个区域的边界.

(v) 一个区域的边界, 它不是 Cantor 曲线.

设 E 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, 令

$$F = \{(x,y) : x \in E, 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad G = R^2 \backslash F.$$

易见, F 是闭集, 从而 G 是开集. 又, G 是连通的. 因此, 它是一个区域. 由于 G 的边界 F 不是连通的, 因而它不是 Cantor 曲线.

综上所述, 我们得知 Cantor 曲线、Jordan 曲线和平面上连接区域的边界, 这三个概念两两相异.

22. 不可求长的简单弧.

设

$$f(x)=\begin{cases}x\cos(\pi/2x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的图形是一条简单弧. 在 $[0,1]$ 中采取分法 Δ:

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

那么

$$\begin{aligned}s(\Delta)=&\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)^2}\\&+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos\pi-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi\right)^2}+\cdots\\&+\sqrt{\left(\frac{1}{2n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2n}\cos n\pi-0\cos 0\right)^2}\\ \geqslant& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

从而得到

$$s=\sup_{\Delta}s(\Delta)=+\infty.$$

也就是说, $f(x)$ 的图形是一条不可求长的简单弧.

23. 不可求长并在每一点都有切线的简单弧.

设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x^2), & 0<x\leqslant 1,\\ 0; & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处可微, 故 $f(x)$ 的图像在每一点都有切线. 然而, 如同例 22 一样, 容易证明, 它的长度是无限的.

24. 每两个不同点之间的弧段长度无限的简单弧.

闭区间上处处连续而又无处可微的任何函数 f, 其图形都有所要求的性质, 因为, 如果它在某两个不同点 $(\alpha,f(\alpha))$ 与 $(\beta,f(\beta))$ 之间的弧段长度是有限的, 那么 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上应当是有界变差的函数, 从而它在 $[\alpha,\beta]$ 上几乎处处可微, 此为矛盾.

25. $[0,1]$ 上的一个递增的连续函数 $f(x)$, 它所对应的曲线之长不能用 (L) 积分 $\int_0^1\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ 来表示.

设 E 是 Cantor 三分集, 对于任何 $x\in E$, 设 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 是它的三进位小数

展开式, 其中 $a_n = 0$ 或 $2, n = 1, 2, \cdots$. 再设

$$f(x) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\cdots,$$

此刻则将右端的展开式理解为用数码 0 和 1 表示的二进位小数展开式. 显然, 在映射 f 之下, E 的像 $f(E)$ 是 $[0,1]$ 的子集. 现证 $f(E) = [0,1]$. 为此, 我们任取 $y \in [0,1]$, 并把它写成二进位小数展开式

$$y = 0.b_1b_2b_3\cdots.$$

于是

$$x = 0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\cdots$$

(按三进位制估值) 是 E 的一个点, 使得 $f(x) = y$.

容易看出, 在映射 f 之下, E 的两个不同点 x_1 与 x_2 具有相同的像点, 当且仅当它们具有形式

$$x_1 = 0.a_1a_2\cdots a_n2000\cdots \quad 及 \quad x_2 = 0.a_1a_2\cdots a_n0222\cdots.$$

此时它们的像是

$$f(x_1) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_n}{2}1000\cdots \quad 及 \quad f(x_2) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_n}{2}0111\cdots.$$

因而 $f(x_1) = f(x_2)$. 换句话说, $f(x_1) = f(x_2)$ 当且仅当 x_1 与 x_2 是在构造 E 时从 $[0,1]$ 删去的开区间 (α_i, β_i) 的端点. 在开区间 (α_i, β_i) 内, 就令 $f(x)$ 等于它在端点的值. 于是, $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的一个函数.

兹证, f 是递增函数. 其实, 只要考察在 E 的点 x 就可以. 分别令 $x', x'' \in E$ 的三进位小数展开式为

$$x' = 0.a'_1a'_2a'_3\cdots, \quad x'' = 0.a''_1a''_2a''_3\cdots,$$

且 $x'' > x'$. 此时, 必定存在 n, 使 $a'_m = a''_m$ $(m < n)$, 而 $a'_n < a''_n$, 于是, 由 f 的定义可得

$$f(x') = 0.\frac{a'_1}{2}\frac{a'_2}{2}\cdots \leqslant 0.\frac{a''_1}{2}\frac{a''_2}{2}\cdots = f(x'').$$

再证 f 是连续的. 也只考察 E 中的点即可. 若 $x'' \to x'$, 则必有 n 随 $x'' \to x'$ 而增大, 并且 $a'_m = a''_m$ $(m < n)$, 所以 $f(x'') \to f(x')$.

由上所述, f 是 $[0,1]$ 上递增的连续函数, 从而可以用公式

$$s = \lim_{\delta \to 0} s(\Delta; x, f)$$

来求曲线 $f(x)$ 的长度 s (参看本章的引言). 取顶点在 $(0,0), (1,1)$ 及 (α_i, β_i) 的端点对应的曲线上的点所成的折线, 这里 (α_i, β_i) 为构造 Cantor 三分集时前 n 步删去的开区间. 它的水平边长是

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{p=1}^{n} 2^{p-1} \cdot 3^{-p} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

每个斜边长是

$$(2^{-2n} + 3^{-2n})^{\frac{1}{2}} = 2^{-n}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}},$$

斜边共 2^n 个, 即作 Cantor 三分集时第 n 步所剩闭区间的数目. 要求的折线的总长是

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n+2^n\cdot 2^{-n}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}\to 2\quad (n\to\infty),$$

即 $s=2$.

另一方面, 当 $x\overline{\in}E$ 时, $f'(x)=0$, 所以

$$\sqrt{1+[f'(x)]^2}=1$$

在 $[0,1]$ 上几乎处处成立, 从而 Lebesgue 积分

$$\int_0^1\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=1,$$

它并不等于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上所对应的曲线的长度 $s=2$.

注 假如 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 那么当 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积时, 就可用积分

$$s=\int_a^b\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt \tag{1}$$

来求 $\varphi(t),\psi(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 所对应的曲线的长度 (参看 [8], pp.268—269).

还可证明, 公式 (1) 成立 (在 (L) 积分意义下) 的充要条件是: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

26. 一个有界变差函数, 使 $\lim_{\delta\to 0}s(\Delta)=s$ 不成立.

下面的例子是由 Schoenflies 作出的.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}1/2^n, & x=(2\nu+1)/2^n,\\ 0, & x\neq(2\nu+1)/2^n,\end{cases}$$

这里, $\nu=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1; n=1,2,3,\cdots$. 我们采取分法

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_k=1,$$

其中 x_i 均不等于形如 $(2\nu+1)/2^n$ 的点, 因此, $f(x_i)=0$, 从而

$$\sum_{i=1}^k\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=1,$$

由此可见

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0}s(\Delta)\leqslant 1.$$

另一方面, 若取分法: $x_0=0, x_1=1/2, x_2=1$, 则

$$\sum_{i=1}^2\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}>1,$$

因而

$$\overline{\lim}_{\delta\to 0}s(\Delta)>1.$$

所以 $\lim_{\delta\to 0} s(\Delta)$ 并不存在.

但因 f 显然是 $[0,1]$ 上的有界变差函数, 所以它所对应的曲线是可求长的 (参看本章的引言), 其长度是 2. 证明如下:

任取分法 Δ, 对应一个正整数 N, 使得

$$s(\Delta) \leqslant 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

另一方面, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 N 相当大, 使

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在点 $x = (2\nu+1)/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ 两旁距 $\varepsilon/[8(2^N-1)]$ 取点, 以这两种点构成了分法 Δ_0 的分点. 于是

$$\begin{aligned} s(\Delta_0) &= \left\{1 - 2(2^N-1)\cdot\frac{\varepsilon}{8(2^N-1)}\right\} + \left\{2\sum_{n=1}^{N}\frac{2^{n-1}}{2^{2n}} - 2(2^N-1)\frac{\varepsilon}{8(2^N-1)}\right\} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $s = \sup_{\Delta} s(\Delta) = 2$.

27. 一个不连续函数, 而有 $\lim_{\delta\to 0} s(\Delta) = s$.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1, & 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

易见, $s = \lim_{\delta\to 0} s(\Delta)$.

注 若可求长曲线 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 那么曲线之长 $s = \lim_{\delta\to 0} s(\Delta)$. 例 26 说明了要使 $s = \lim_{\delta\to 0} s(\Delta)$ 成立, 函数的连续性的条件是去不得的, 即使对有界变差函数而言, 情况也是如此. 例 27 则说明了函数的连续性也不是 $s = \lim_{\delta\to 0} s(\Delta)$ 成立的必要条件.

28. 单位正方形内的一条简单弧, 其平面测度可以任意接近 1.

在例 17 和 18 中已经看到, 充实单位正方形 $I = [0,1]\times[0,1]$ 的曲线不可能是简单弧; 出于同样的理由, 每个简单弧在平面内都是无处稠密的. 这就似乎, 简单弧不能占有 I "太多的地方". 特别是, 它不能占有几乎全部 I, 因为, 如果 I 内的一个简单弧的测度等于 1, 它将在 I 内稠密, 又作为闭集它将等于 I. 然而, 一个简单弧具有正的平面测度却是可能的. 实际上, 如果 ε 为 0 到 1 之间的任一正数, 存在着一条平面测度大于 $1-\varepsilon$ 的简单弧. 例如, 美国数学家 Osgood (1864—1943) 用了一个线性测度大于 $\sqrt{1-\varepsilon}$ 的 Cantor 集构造出一个平面测度大于 $1-\varepsilon$ 的简单弧. 细节参看 [121].

29. 有共同边界的四个两两不相交的平面区域.

设想大海中的一个岛屿, 岛上有三个湖沼, 并且想象如次的工作程序. 在第一小时内自海及这三个湖沼的每一个开凿运河, 要求各运河都是 "盲端点" (实际就是各水源的弯流), 使这些运河彼此不相连接, 并且要求经过一小时的工作, 使陆地上每点到达海水, 以及到达三湖沼的每个的湖水之距离统统小于 1 公里. 在以后半小时内, 所开凿的四条运河继续延长, 仍要所有这些运河保持为盲端, 彼此不相连接, 并且陆地上每点到达此水源之水的距离统统小于 1/2 公里. 在这以后四分之一小时内, 运河延长的更远, 仍要彼此不通, 它们深入了这个岛屿, 其 "密度" 使陆地上每点到达这四个水源之水的距离统统小于 1/8 公里, 以下类推. 经过这么样的两小时的活动, 岛屿上这才有了在平面上无处稠密的某连续点集 C, 在其每点的任意邻域内都有四水源之每个的水, 并且所有这些水源 (海及湖沼) 仍然彼此分离, 也就是其中任何两种的水也不混合. 这些水源 (由其已被开凿的运河而延长) 就是那样的四个区域, 连续点集 C 形成了它们的共同边界; 这些区域中之一 ("海") 不是有界的而其余三个则是有界的.

30. 与自己的闭包的内部不同的平面区域.

设

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0, 1] \times \{0\}),$$

即 S 是一个有裂纹的圆盘. 于是

$$\overline{S} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

而 $\overline{S}$ 的内部 $(\overline{S})^0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

注 因为每个 Jordan 区域都等于它自己闭包的内部 (参看 [118], p.477), 所以 S 是一个非 Jordan 区域的区域. 后面的例子将要指出, 并非每个等于自己闭包内部的区域都是 Jordan 区域.

31. 与自己的闭包的内部相等的非 Jordan 区域.

设 E 为例 29 所定义的四个区域中的任何一个. 因为连续点集 C 是四个两两不相交的区域的共同边界, 故由 Jordan 曲线定理可知, 这四个区域中的任何一个都不是 Jordan 区域.

另一方面, 我们即将证明, E 等于它自己的闭包的内部. 首先, 因为 $E \subset \overline{E}$, E 又是开集, 所以 $E = E^0 \subset (\overline{E})^0$. 然后, 我们希望证明逆包含关系: $(\overline{E})^0 = (E \cup C)^0 \subset E$. 如其不然, 就要有 C 的一个点 p, 它是 $E \cup C$ 的内点. 但是这意味着, 有 p 的一个邻域 N 位于 $E \cup C$ 之内, 因此不包含另外三个区域的点, 这与 C 中每一点的任一邻域内存在四个区域中的点相矛盾.

32. 边界的测度为正数的有界平面区域.

设 A 为 $[0,1]$ 内的一个具有正测度的 Cantor 集, 又设

$$R = ((0,1) \times (-1,1)) \setminus (A \times [0,1)).$$

那么 R 是一个区域, 并且 R 的边界是

$$F(R) = (\{0\} \times [-1,1]) \cup (\{1\} \times [-1,1]) \cup (A \times [0,1))$$
$$\cup((0,1) \times \{1\}) \cup ((0,1) \times \{-1\}),$$

因此 $mF(R) = m(A \times [0,1)) = mA > 0$.

显然, R 不是 Jordan 区域 $((\overline{R})^0 \neq R)$. 例 37 将看到一个 Jordan 区域, 其边界有正的平面测度.

33. 图形为不可测平面集的单实变实值函数.

设 E 为例 15 中的不可测平面集. 在 R^1 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \max\{y : (x,y) \in E\}, & \{y : (x,y) \in E\} \neq \varnothing, \\ 0, & \{y : (x,y) \in E\} = \varnothing. \end{cases}$$

设 $E_1 = \{(x, f(x)) : x \in R^1\} \cap E, E_2 = E \setminus E_1$. 于是, E_1 与 E_2 必定有一个 (或者两个都是) 不可测集, 因为它们的并集是 E. 如果 E_1 不可测, 那么 f 的图形

$$F = \{(x, f(x)) : x \in R^1\}$$

是 E_1 和 x 轴的一个子集的并集; 因为后者的平面测度为零, 所以 F 不可测. 如果 E_2 不可测, 对于 $x \in R^1$ 定义函数 g 如下:

$$g(x) = \begin{cases} \min\{y : (x,y) \in E\}, & \{y : (x,y) \in E\} \text{ 由两个不同点组成}, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

这时, g 的图形

$$G = \{(x, g(x)) : x \in R^1\}$$

是 E_2 和 x 轴的一个子集的并集, 因而是不可测的. 于是, 用某种方法, 图形为不可测平面集的函数总是存在的.

34. 没有面积的有界平面集.

单位正方形内, 两个坐标都是有理数的点的集合

$$S = (\mathscr{D} \cap [0,1]) \times (\mathscr{D} \cap [0,1])$$

没有面积, 其中 $\mathscr{D}$ 为全体有理数, 这是因为 S 的边界 $F(S)$ 的面积不等于零 (集 $F(S)$ 是单位正方形本身, 因此, 它的面积等于 1). S 的外面积是 1, 而它的内面积是 0.

35. 没有面积的紧平面集.

设 A 是 $[0,1]$ 中具有正测度 ε 的 Cantor 集, 再设 $S = A \times [0,1]$. 易见, S 是

一个紧的平面集, $F(S) = S$. 因此, $F(S)$ 的平面测度就等于 A 的线性测度:

$$mF(S) = mA \times m[0,1] = mA = \varepsilon.$$

由于 $F(S) = S$ 是一个紧集, 所以它的外面积等于它的测度, 因而是正数 ε. 然而, S 的内面积等于零, 所以 S 没有面积.

36. 没有面积的有界平面区域.

例 32 的区域 R 有界, 因为它的边界具有正的平面测度, 所以它没有面积.

37. 没有面积的有界平面 Jordan 区域.

设 ε 为小于 1 的正数, 再设 A 是位于单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 内的一个简单弧, 其平面测度大于 $1-\varepsilon$ (参看例 28), 表示这条曲线的函数是

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

我们注意, 这个简单弧是用这样一种方法构造出来的, 它包含了积集 $E \times E$, 其中 E 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, 其线性测度大于 $\sqrt{1-\varepsilon}$ (参看 [121]). 因此, 这个简单弧通过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

设 C 是由 A 与三个直线段 $\{0\} \times [-\varepsilon, 0], \{1\} \times [-\varepsilon, 0]$ 和 $[0,1] \times \{-\varepsilon\}$ 组成的简单闭曲线, 再设 R 是以 C 作为边界的有界区域. 于是, R 是一个 Jordan 区域, 而它的边界有外面积, 其值大于 $1-\varepsilon > 0$, 从而 R 没有面积.

38. 一条简单闭曲线, 它的平面测度比它围成的有界区域的平面测度还要大.

设 C 与 R 是例 37 所定义的曲线和区域, m 代表 Lebesgue 平面测度, 那么

$$m(R \cup C) = mR + mC \leqslant 1 + \varepsilon.$$

因为 $mC > 1 - \varepsilon$, 所以有

$$mR < 2\varepsilon.$$

当 $\varepsilon < 1/3$ 时, R 的测度就小于 C 的测度. 与此同时, R 和 C 的测度能够分别使之任意接近 0 和 1.

39. 一个曲面, 它的内接多面体的面积不收敛于它的面积.

下面的例子属于 Schwarz [147].

考虑一个半径为 1, 高为 1 的正圆柱面 S. 我们按下列方式在 S 内作内接多面体: 在圆柱面 S 上作 n 个等距间隔 (相距为 $1/n$) 的圆周. 将每一圆周分为 m 段相等的圆弧, 并使每一圆弧的端点与上下相邻圆周上圆弧的中点对齐.

考虑由下列三角形组成的多面体, 这些三角形的两个顶点就是上述圆弧的两个端点, 而其第三个顶点是上面 (或下面) 相邻圆周上与此圆弧中点对齐的端点.

这些三角形构成一个内接于 S 的多面体 P_{mn}, 这个多面体由 $2mn$ 个三角形组

成, 每个三角形的面积为

$$\sin\frac{\pi}{m}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因而 P_{mn} 的面积等于

$$\begin{aligned}A(P_{mn})&=2mn\sin\frac{\pi}{m}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=2mn\sin\frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

现在, 令 m 及 n 趋向无穷大, 则多面体 P_{mn} "趋向 S". 首先我们注意到

$$\liminf_{m,n\to\infty} A(P_{mn})\geqslant 2\pi,$$

这是因为

$$2mn\sin\frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant 2mn\sin\frac{\pi}{m}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)=2m\sin\frac{\pi}{m}$$

及

$$\lim_{m\to\infty} 2m\sin\frac{\pi}{m}=2\pi.$$

其次, 我们来证明确实有

$$\liminf_{m,n\to\infty} A(P_{mn})=2\pi.$$

为此, 令 $m=n$, 则

$$A(P_{mn})=2n^2\sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}\right]^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\lim_{m,n\to\infty} A(P_{mn})=2\pi.$$

但若选取与 m 相比足够大的 n, 则我们可以得到任意大于 2π 的极限. 事实上, 若选取 $n=m^3$, 就得到极限 $+\infty$, 这是因为

$$A(P_{mm^3})=2m^4\sin\frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{m^6}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

及

$$\lim_{m\to\infty} A(P_{mm^3})=+\infty.$$

注 上面的例子告诉我们, 与曲线弧长相类似的定义对定义曲面的面积是不适用的.

第十四章

二元函数

0. 引言.

设 E 为 R^2 中的点集, $f(x,y)$ 是定义在 E 上的二元函数, (x_0,y_0) 是 E 的聚点, A 是一定数. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$, 皆有 $\delta>0$, 使当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

且 $(x,y)\in E$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

我们就说当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时, 函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限 (此极限也称为二重极限), 并记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

连续函数的概念由极限概念立即可以得到, 亦即若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有定义, 又 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在且等于 $f(x_0,y_0)$, 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续①. 若 $f(x,y)$ 在每一点 $(x,y)\in E$ 连续, 则称 $f(x,y)$ 在 E 上连续.

关于极限的性质和运算法则, 连续函数的运算法则以及有界闭集上连续函数的性质, 均和一元函数的情形相仿, 其证明也大体相同, 这里不再赘述.

若对任一固定的 y, 当 $x\to a$ 时, $f(x,y)$ 的极限存在:

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y),$$

而 $\varphi(y)$ 在 $y\to b$ 时的极限也存在并等于 A, 亦即 $\lim_{y\to b}\varphi(y)=A$, 则称 A 为

①对于 E 的孤立点处, 总约定 f 在该点是连续的.

$f(x,y)$ 先对 x、后对 y 的累次极限, 记为

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=A.$$

同样可定义先对 y、后对 x 的累次极限

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

设 $f(x,y)$ 定义在 (x_0,y_0) 的某个邻域上, 假如

$$\lim_{\rho\to 0+} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)=l$$

存在, 则称 l 为 $f(x,y)$ 沿着方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的极限.

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值就称为函数 $u=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 的偏导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $f_x, \frac{\partial u}{\partial x}, u_x$. 同样地, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 就是极限值 (如果存在)

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

一般, $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 仍旧是 x,y 的函数, 如果它们对 x 或对 y 还可以求偏导数, 就称为原来函数的二阶偏导数, 记为

$$f_{x^2}=\frac{\partial(f_x)}{\partial x} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$f_{y^2}=\frac{\partial(f_y)}{\partial y} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$f_{xy}=\frac{\partial(f_x)}{\partial y} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y};$$

$$f_{yx}=\frac{\partial(f_y)}{\partial x} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

设函数 $f(x,y)$ 定义于某一区域内, $P(x,y)$ 为这一区域内的任一点, l 为过 P 点的任一有向线段, 设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这方向上另一任意点, $|PP'|$ 是 P,P' 两点间线段的长度, 令 P' 沿 l 趋向于 P, 若

$$\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|PP'|}$$

存在, 则此极限就称为 $f(x,y)$ 在 P 点沿 l 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial l}$.

若函数 $u=f(x,y)$ 的全改变量 Δu 可表示为

$$\begin{aligned}\Delta u&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=A\Delta x+B\Delta y+O(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\end{aligned}$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关而仅依赖于 x,y, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y)可微, 并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分, 记为 du 或 $df(x,y)$, 即

$$du=df(x,y)=A\Delta x+B\Delta y.$$

容易证明, 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 则 $f_x=A, f_y=B$, 并注意, $\Delta x=$

$dx, \Delta y = dy$, 故得到

$$du = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

下面我们再引入二元函数的极值概念.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内成立不等式

$$f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 取得局部极大值 $f(x_0,y_0)$, 点 $M_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的局部极大点; 类似地, 若在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内成立不等式

$$f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 取得局部极小值 $f(x_0,y_0)$, 点 M_0 称为函数 $f(x,y)$ 的局部极小值点.

极大值与极小值统称为极值; 极大点与极小点统称为极值点.

有关二元函数的极限、连续、微分、极值的更多的材料, 可参看 [7], [28] 和 [141].

1. 两个累次极限都存在而不相等的函数.

设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+y^2-y}{x+y}, & x \neq 0, y \neq 0 \text{ 且 } x+y \neq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

由于 $y \neq 0$ 时恒有

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = y - 1,$$

故

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = -1.$$

同理

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 1.$$

2. 两个累次极限存在且相等, 但二重极限不存在的函数.

设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

易见

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 0.$$

因此, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个累次极限都存在且相等. 然而, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的二重极限并不存在, 因为当 (x,y) 沿着直线 $y = mx\,(m \neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \to 0} f(x,mx) = \lim_{x \to 0} mx^2/(x^2+m^2x^2) \\ &= m/(1+m^2) \neq 0. \end{aligned}$$

我们还可进一步构造这样的函数 $f(x,y)$, 使得 $\lim_{y\to 0} f(x,y) = g(x)$ 存在且关于 x 一致, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = h(y)$ 存在且关于 y 一致, 又有

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{y\to 0} h(y),$$

但是 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 仍不存在. 例如, 令

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

则

$$g(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$h(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

这两个极限在整个实数系上都是一致收敛的, 且有

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{y\to 0} h(y).$$

然而, 由于那些任意接近 $(0,0)$ 的点当中, 既有 f 等于 0 的点, 也有 f 等于 1 的点, 所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不能存在.

3. 二重极限存在而两个累次极限都不存在的函数.

令

$$f(x,y) = (x+y)\sin(1/x)\sin(1/y),$$

则 $\lim_{y\to 0} y\sin(1/y) = 0$, 从而

$$\lim_{y\to 0} \sin(1/x) y \sin(1/y) = 0.$$

因为当 $x \neq 0$ 及 $x \neq \pm 1/(n\pi)$ 时, $\lim_{y\to 0} x\sin(1/x)\sin(1/y)$ 不存在, 从而 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. 由对称性可知, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ 也不存在.

以下将证明, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. 事实上,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= |x+y||\sin(1/x)||\sin(1/y)| \\ &\leqslant |x| + |y|, \end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 $|x| < \varepsilon/2$, $|y| < \varepsilon/2$, 且 $x \neq 0$ 及 $y \neq 0$ 时将有 $|x| + |y| < \varepsilon$, 从而有

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon.$$

此即 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

注 由例 2 及例 3 可知, 累次极限存在与否和二重极限存在与否, 二者之间没有什么关系. 但可证明, 若某个累次极限和二重极限都存在, 则二者一定相等 (参看 [7], pp.129—130). 因之, 若两个累次极限存在而不相等, 则二重极限一定不存在.

4. 二重极限和一个累次极限存在, 而另一个累次极限不存在的函数.

令

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $|f(x,y)|\leqslant |x|+|y|$, 因而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

又易见

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

但是, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ 并不存在.

应当注意, 如果极限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 与 $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$ 都存在, 那么它们必定相等; 又若极限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 与 $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$ 都存在, 它们也必定相等 (参看 [7], pp.129—130).

5. 仅有一个累次极限存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

但是, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ 和 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 均不存在.

6. 在原点没有极限, 但沿着任一直线逼近原点时极限值都为零的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy^3/(x^2+y^6), & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

对任意的 α, $f(x,y)$ 沿着方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的极限

$$\lim_{\rho\to 0+} f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)=\lim_{\rho\to 0+}\frac{\rho^4\cos\alpha\sin^3\alpha}{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^6\sin^6\alpha}=0.$$

但是, 极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在. 事实上, 如果 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在, 那么必有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

(参看 [7], pp.129—130). 因此, 对于过 $(0,0)$ 的曲线 $y=\sqrt[3]{x}$, 应该有

$$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt[3]{x})=0.$$

然而 $\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt[3]{x}) = \lim_{x\to 0} x^2/(x^2+x^2) = \frac{1}{2}$. 矛盾, 足见 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在.

我们还可进一步构造在原点没有极限, 但沿着任一形如 $y = cx^{m/n}$ 的曲线逼近原点时极限值都为零的函数, 其中 c 是非零常数, n, m 为互质的正整数, 当 n 为偶数时 $x \geqslant 0$. 例如, 在 $R^1 \times R^1$ 上定义函数 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则当 (x,y) 沿着任意曲线 $y = cx^{m/n}$ 逼近 $(0,0)$ 时, 就有

$$\lim_{x\to 0} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-1/x^2}x^{-m/n}}{e^{-2/x^2}x^{-2m/n}+c^2} = 0.$$

也就是说, (x,y) 沿着任一形如 $y = cx^{m/n}$ 的曲线逼近原点时, $f(x,y)$ 的极限值都为零. 然而, 当 (x,y) 沿着 $y = e^{-1/x^2}$ 的曲线逼近原点时, $f(x,y)$ 的极限为 $1/2$. 由此可知, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在.

注 对于一元函数 $y = f(x)$, 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 的左、右极限皆存在且相等. 对于二元函数 $u = f(x,y)$, 若极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 存在, 则 $f(x,y)$ 沿着任何方向 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的极限皆存在且等于 A. 上述反例说明和一元函数不一样, 这个陈述之逆并不成立.

7. 分别对各个变量连续的间断函数.

设

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

则对任意固定的 $y, f(x,y)$ 是 x 的连续函数; 而对任意固定的 $x, f(x,y)$ 是 y 的连续函数. 但是, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处并不连续, 因为当 $(x,y) \to (0,0)$ 且 $x = y$ 时, $f(x,y)$ 并不趋于 $f(0,0) = 0$.

8. 函数 $f(x,y)$, 它沿着从点 (x_0,y_0) 引出的任何直线在 (x_0,y_0) 都是连续的, 但 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 并不连续.

下面的例子是由 W. H. Young 和 G. C. Young [176] 作出的. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/y, & y > 0 \text{ 且 } x^2/y \leqslant 1, \\ y/x^2, & y > 0 \text{ 且 } x^2/y \geqslant 1, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

又设 $f(x,-y) = f(x,y)$. 因为任意接近 $(0,0)$ 的地方总会有形如 (a,a^2) 的点, 相应的 $f(x,y)$ 的值为 1, 所以 $f(x,y)$ 在原点间断.

现在证明, $f(x,y)$ 沿着任一通过原点的直线在原点都是连续的. 事实上, 在 Ox 轴上 $f(x,y) \equiv 0$, 所以它沿 Ox 轴在原点是连续的. 现考虑过原点的直线

$y=mx, m\neq 0$, 当 $|x|$ 充分小时, $x^2/y\leqslant 1$, 所以

$$|f(x,y)|=|x^2/y|=|x/m|.$$

由此可见, $f(x,y)$ 沿着直线 $y=mx$ 在原点是连续的.

例 6 中的函数也具有所需的性质.

其实, 对于任给平面可数点集 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 我们总可构造函数 $g(x,y)$, 使 $g(x,y)$ 在 (a_n,b_n) $(n=1,2\cdots)$ 间断, 而在其他的点处都连续. 又 $g(x,y)$ 沿任一过 (a_n,b_n) 的直线在 (a_n,b_n) 都是连续的. 事实上, 设 $f(x,y)$ 的定义如上, $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$ 是平面上的可数点集, 令

$$\begin{aligned}g(x,y)=&\frac{1}{2}f(x-a_1,y-b_1)+\frac{1}{2^2}f(x-a_2,y-b_2)+\cdots\\&+\frac{1}{2^n}f(x-a_n,y-b_n)+\cdots,\end{aligned}$$

则 $g(x,y)$ 除了点 (a_n,b_n) $(n=1,2,\cdots)$ 而外, 它在其余的点上都是连续的. 又, $g(x,y)$ 沿任一过 (a_n,b_n) 的直线在 (a_n,b_n) 也是连续的.

这个例子也是由 W. H. Young 和 G. C. Young 作出的.

9. $[0,1]\times[0,1]$ **上的一个无处连续函数** $f(x,y)$, **使对每一** $y\in[0,1], f(x,y)$ **是** x **的连续函数.**

令

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & y\text{ 是无理数}, x\text{ 任意},\\ 1, & y\text{ 是有理数}, x\text{ 任意},\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上无处连续. 由于对任一固定的 $y, f(x,y)$ 作为 x 的函数是一常值函数, 所以它是 x 的连续函数.

10. 具有各阶偏导数的不连续函数.

第一例　设

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x^2/y^2-y^2/x^2}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

容易证明, $f(x,y)$ 具有各阶偏导数 $\partial^{m+n}f(x,y)/(\partial x^m\partial y^n)$. 因为当 $t\neq 0$ 时, $f(t,t)=e^{-2}$, 而 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

这个例子是由 Burr [51] 作出的.

第二例　设

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{x^{-2}y^{-2}}/(e^{x^{-4}}+e^{y^{-4}}), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 具有各阶偏导数. 因为

$$\lim_{\substack{x=y\\x\to 0}}f(x,y)=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处间断.

这个例子是由 Snow [157] 作出的.

11. 二阶混合偏导数相等而不连续的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^2\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=4x(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})-x\sqrt{x^2+y^2}\cos(1/\sqrt{x^2+y^2}),$$

$$f_y(x,y)=4y(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})-y\sqrt{x^2+y^2}\cos(1/\sqrt{x^2+y^2}).$$

$$\begin{aligned}f_{xy}(x,y)=&\,8xy\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})+8xy\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}\\&-xy\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}-xy\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})/(x^2+y^2).\end{aligned}$$

又按偏导数的定义, 可得

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,\quad f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)=0.$$

另一方面, 因为当 $m>0$ 时,

$$\varlimsup_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f_{xy}(x,y)=\frac{m}{1+m^2},\qquad \varliminf_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f_{xy}(x,y)=-\frac{m}{1+m^2},$$

所以 $f_{xy}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

同理可证, $f_{yx}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也不连续.

注 可以证明, 如果 f_x, f_y, f_{xy} 在定义域上都存在, 且 f_{xy} 连续, 那么 f_{yx} 也存在, 而且 $f_{xy}=f_{yx}$ (参看 [11], p.98). 上述反例说明当这个命题的条件不成立时, 二阶混合偏导数仍有相等的可能性.

12. 函数 f, 使 $f_x(0,y)$ 是 y 的连续函数, 而 $f_y(x,0)$ 不是 x 的连续函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin(4\arctan(y/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_x(0,y)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\sin(4\arctan(y/\Delta x))=0,\end{aligned}$$

所以 $f_x(0,y)$ 是 y 的连续函数. 然而,

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\begin{aligned}f_y(x,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x\sin(4\arctan(\Delta y/x))}{\Delta y}=4,\end{aligned}$$

因此, $f_y(x,0)$ 在 $x=0$ 处不连续.

13. 两个偏导数在某点连续, 而本身在该点的任何邻域内不连续的函数.

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(x-1/n)(y-1/n)}{(x-1/n)^2+(y-1/n)^2}, & (x,y)\neq(1/m,1/m),\\ & m=1,2,\cdots,\\ \displaystyle\sum_{n\neq m}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(x-1/n)(y-1/n)}{(x-1/n)^2+(y-1/n)^2}, & (x,y)=(1/m,1/m),\\ \dfrac{1}{2}, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

当 $(x,y)\neq(1/m,1/m)$ $(m=1,2,\cdots)$ 时, 按照函数项级数逐项求导数的法则, 得到

$$f_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(y-1/n)[(y-1/n)^2-(x-1/n)^2]}{[(x-1/n)^2+(y-1/n)^2]^2},\tag{1}$$

$$f_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(x-1/n)[(x-1/n)^2-(y-1/n)^2]}{[(x-1/n)^2+(y-1/n)^2]^2}.\tag{2}$$

当 $(x,y)=(1/m,1/m)$ 时, $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 分别等于 (1) 与 (2) 中缺 $n=m$ 项的级数.

在原点, 按偏导数的定义, 有

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(x-1/n)(-1/n)}{(x-1/n)^2+1/n^2}-\frac{1}{2}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{-\frac{1}{2}x}{(x-1/n)^2+1/n^2}\right]=0,\end{aligned}$$

同理, $f_y(0,0)=0$.

以上结果说明 $f(x,y)$ 在原点连续, 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有无穷多个不连续点 $(1/m,1/m), m=1,2\cdots$; 而 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在原点都是连续的.

注 容易证明, 如果一元函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 那么 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内必定连续. 上述例子说明了对于二元函数而言, 则不尽相同.

14. 偏导数存在, 但沿任何其他方向的导数都不存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & y=0, \\ y, & x=0, \\ 1, & \sqrt{x^2+y^2}=1/n \text{ 且 } x\neq 0,\ y\neq 0,\ n=1,2,\cdots, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由于 $f(x,0)=x$, 因而 $f_x(0,0)=1$. 同样, $f_y(0,0)=1$. 但是, 对于任何 $\alpha\neq 0$, 在直线 $y=\alpha x$ 上,

$$f(x,\alpha x)=\begin{cases} 1, & \sqrt{x^2+\alpha^2x^2}=1/n, \text{ 即 } |x|=1/(n\sqrt{1+\alpha^2}),\ n=1,2,\cdots, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 处是不连续的, 当然不可能有有限导数, 这说明了虽然 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在, 然而, $f(x,y)$ 在原点处沿着任何其他方向的导数可能都不存在.

15. 函数 f, 使 $f_{yx}(x,y)$ 存在而 $f_x(x,y)$ 不存在.

设 $g(x)$ 是无处可微的连续函数 (参看第三章例 29), 令

$$f(x,y)=g(x),$$

则 $f_{yx}(x,y)=0$ 而 $f_x(x,y)$ 不存在.

注 上述反例说明 $f_{yx}(x,y)$ 的存在性 (甚至连续) 并不蕴涵 $f_x(x,y)$ 的存在性.

16. 仅在一点连续并可微的函数.

函数

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \text{在有理点}, \\ 0, & \text{在其余点} \end{cases} \quad (\alpha>0)$$

显然在异于零的任意点间断, 而在零点连续. 又, 它在零点还可微:

$$f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=0\cdot x+0\cdot y+\rho^{1+\alpha},$$

这里 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho^{1+\alpha}=o(\rho)$ $(\rho\to 0)$.

17. 可微而不连续可微的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin(1/x)+y^2\sin(1/y), & xy\neq 0, \\ x^2\sin(1/x), & x\neq 0 \text{ 而 } y=0, \\ y^2\sin(1/y), & x=0 \text{ 而 } y\neq 0, \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

则两个函数

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin(1/x)-\cos(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin(1/y)-\cos(1/y), & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$$

都在原点间断, 因此 f 在该点不是连续可微的. 然而, f 处处可微. 例如, f 在 $(0,0)$ 点可微, 因为对于 $h^2+k^2\neq 0$, $f(h,k)-f(0,0)$ 可以写成

$$f_x(0,0)h+f_y(0,0)k+\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_2(h,k)k,$$

式中

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_1(h,k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_2(h,k)=0.$$

实际上, 这一表示可取特定形式:

$$f(h,k)-f(0,0)=\begin{cases}\left(h\sin\dfrac{1}{h}\right)h+\left(k\sin\dfrac{1}{k}\right)k, & hk\neq 0,\\ \left(h\sin\dfrac{1}{h}\right)h+o\cdot k, & h\neq 0 \text{ 而 } k=0,\\ o\cdot h+\left(k\sin\dfrac{1}{k}\right)k, & h=0 \text{ 而 } k\neq 0.\end{cases}$$

18. 函数 f, 它在某点的邻域内连续且有有界的偏导数, 但 f 在该点仍不能微分.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

则 f 在 $x^2+y^2>0$ 处显然是连续的. 因为

$$|f(x,y)|\leqslant |xy|/\sqrt{2|xy|}=\sqrt{|xy|}/2,$$

所以 f 在 $(0,0)$ 点也是连续的. 又当 $x^2+y^2>0$ 时

$$f_x(x,y)=y^3/(x^2+y^2)^{3/2},\quad f_y(x,y)=x^3/(x^2+y^2)^{3/2},$$

而在 $(0,0)$ 处, $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$, 所以

$$|f_x(x,y)|\leqslant |y^3|/|y^3|=1,\quad |f_y(x,y)|\leqslant 1,$$

即 f 的两个偏导数都是有界的.

现证 f 在点 $(0,0)$ 处不可微. 事实上, 如若不然, 那么就应该有

$$f(x,y)-f(0,0)=xy/\sqrt{x^2+y^2}=\varepsilon\sqrt{x^2+y^2},$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 式中的 ε 应趋于 0. 今特别于上式中取 $x=y>0$, 则得

$$x/\sqrt{2}=\sqrt{2}\varepsilon x.$$

由此, $\varepsilon=1/2$, 而当 $x\to 0$ 时 ε 却并不趋向于 0, 这就违反了函数 f 在 $(0,0)$ 点可微性的假设.

注 对于一元函数而言, 可微与可导 (有限导数) 是同一回事; 但对多元函数来说, 函数 f 在一点处可微的必要条件是函数 f 在该点处有偏导数, 然而, f 在一点处有偏导数 (甚至 f 在该点的某个邻域内连续且有有界的偏导数) 还不能保证 f 在该点可微.

19. 偏导数均不连续的可微函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则其偏导数是

$$f_x(x,y)=-x\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}+2x\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}),\quad x^2+y^2\neq 0,$$
$$f_y(x,y)=-y\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}+2y\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}),\quad x^2+y^2\neq 0,$$
$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

易见, $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点都是不连续的. 因为

$$f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}),$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处是可微的.

我们甚至可以作出一个函数, 它的偏导数在某点不连续且在该点的任何邻域内都无界, 但此函数在该点仍然可微. 例如, 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/(x^2+y^2)), & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

则 f 的偏导数是

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin(1/(x^2+y^2))-2x\cos(1/(x^2+y^2))/(x^2+y^2) & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin(1/(x^2+y^2))-2y\cos(1/(x^2+y^2))/(x^2+y^2), & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

同理,

$$f_y(0,0)=0.$$

易见, $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $(0,\ 0)$ 处都是间断的. 又, 对于任给的正数 M, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,

$$f_x(1/\sqrt{2n\pi},0)=-2\sqrt{2n\pi}<-M,$$

因此, $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的任何邻域内都是无界的, 同理可证, $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的任何邻域内也是无界的.

下面再讨论 $f(x,y)$ 于点 $(0,0)$ 的可微性. 因为

$$|f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y|=|f(x,y)|=(x^2+y^2)|\sin(1/(x^2+y^2))|$$
$$\leqslant x^2+y^2=o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

所以 f 在点 $(0,0)$ 是可微的.

注　若 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 及其某一邻域内存在, 且在这一点它们都连续, 则函数 $f(x,y)$ 在该点可微 (参看 [7], pp.252—253). 上述反例表明, f_x 及 f_y 的连续性只是 f 可微的充分条件, 而不是必要条件. 结合例 18, 我们可以得到下面的断语: 函数在一点处可微的性质比在该点处有连续的偏导数的性质弱, 但比在该点处偏导数存在的性质强.

20. 二阶混合偏导数不相等的可微函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则

$$f_x(x,y)=\begin{cases}(x^4+4x^2y^2-y^4)y/(x^2+y^2)^2, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases}(x^4-4x^2y^2-y^4)x/(x^2+y^2)^2, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$$
$$f_x(0,y)=\begin{cases}-y, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}\qquad f_y(x,0)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

从而

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$
$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

所以 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$. 然而, 函数 $f(x,y)$ 是连续而且可微的, 因为 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都是到处连续的 (参看 [7], pp.252—253).

21. 在某点沿任何方向可微, 而在该点并不连续的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}x^5/[(y-x^2)^2+x^6], & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

今证函数 f 在 $(0,0)$ 点沿所有方向都是可微的. 事实上, 令 $\rho=(\cos\theta,\sin\theta)$, 因为

$$\begin{aligned}F(t)&=f(t\cos\theta,t\sin\theta)\\&=\begin{cases}t^5\cos^5\theta/[(t\sin\theta-t^2\cos^2\theta)^2+t^6\cos^6\theta], & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}\\&=\begin{cases}t^3\cos^5\theta/[(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta], & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}\end{aligned}$$

所以当 $\sin\theta\neq 0$ 时,

$$F'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos^5\theta}{(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta}=0;$$

而当 $\sin\theta=0$ 时,

$$F'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^5\theta}{\cos^4\theta+t^2\cos^6\theta}=\cos\theta.$$

因此, 函数 f 在 $(0,0)$ 点沿所有的方向都是可微的.

另一方面, 当点 (x,y) 沿着曲线 $y=x^2$ 趋近于 $(0,0)$ 时, 极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

不存在, 从而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在, 因此, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

22. 有关的一切偏导数都存在, 但复合函数求导公式不成立的函数.

设

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|},$$

不难验证, $f_x(0,0)$ 及 $f_y(0,0)$ 均存在且等于 0, 但 f 在 $(0,0)$ 点不可微. 此时, 若令 $x=t,y=t$, 代入得 $f(t,t)=|t|$, 它在 $t=0$ 处没有有限导数, 但是,

$$f_x(0,0)\frac{dx}{dt}+f_y(0,0)\frac{dy}{dt}=0.$$

这就说明, 对此函数而言, 复合函数求导公式

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=f_x(0,0)\frac{dx}{dt}+f_y(0,0)\frac{dy}{dt}$$

不能成立.

注 如果 $f(x,y)$ 在定义域 G 内可微, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 对于 t 可微, $(\varphi(t),\psi(t))\in G$, 则 $f[\varphi(t),\psi(t)]$ 对于 t 可微, 且有

$$\frac{df}{dt}=f_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

(参看 [7], pp.255—256). 上述反例表明, 有别于一元函数的情形, 对于多元函数而言, 如果仅是导数存在, 上述复合函数求导公式还不一定成立.

23. 在平面区域 D 内 $f_y(x,y)\equiv 0$, 但是 f 在 D 内并非与 y 无关的连续可微函数.

设 L 为 $R^1\times R^1$ 内的射线 (闭的半直线);

$$L=\{(x,y):x\geqslant 0,y=0\},$$

再设 $D = R^1 \times R^1 \setminus L$. 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \text{ 且 } y > 0, \\ 0, & \text{其他的 } (x,y) \in D, \end{cases}$$

在 D 内是连续可微的, 并且确有连续的二阶偏导数 (如果以 e^{-1/x^2} 取代 x^3, f 就有各阶连续偏导数). 虽然 f 关于 y 的一阶偏导数 $f_y(x,y)$ 在 D 内恒等于零, 但是 f 并非与 y 无关; 例如 $f(1,1) = 1$, 而 $f(1,-1) = 0$.

这个例子表明, 为了证实在整个区域 D 内一阶偏导数恒等于零的函数是常值函数, 下面的证法无效: "既然 $f_x(x,y) \equiv 0$, 那么 f 不依赖于 x; 既然 $f_y(x,y) \equiv 0$, 那么 f 不依赖于 y; f 既不依赖 x 也不依赖 y, 所以一定是个常数".

应当注意, 如果每一条平行于 y 轴的直线与区域 D 的交是一个区间, 那么这个反例将成为不可能的 (参看 [119], p.288, 例 32).

24. 函数 $F(x,y)$, 尽管 $F_y(x_0,y_0) = 0$, 但在 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y) = 0$ 能唯一确定 y 为 x 的函数 $y = f(x)$, 并且 $y_0 = f(x_0)$.

令 $F(x,y) = (y-x)^2$, 则

$$F_y(x,y) = 2(y-x),$$

所以在 $x = y = 0$ 处, $F_y(x,y) = 0$. 但这并不妨碍所给方程 $F(x,y) = 0$ 有唯一解 $y = x$, 且当 $x = 0$ 时这个解等于零.

注 我们有如下的隐函数存在定理. 设函数 $F(x,y)$ 满足下面四个条件:

(i) 在矩形 D $(x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b)$ 上连续;

(ii) 在矩形 D 上具有对 x 和对 y 的连续偏导数;

(iii) $F(x_0,y_0) = 0$;

(iv) $F_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不等于零.

则在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内, 由方程 $F(x,y) = 0$ 能唯一确定 y 为 x 的函数 $y = f(x)$, 并且 $y_0 = f(x_0)$ (参看 [7], pp.278—281).

上述反例说明, 隐函数存在定理仅仅给出其图像通过已知点 (x_0,y_0) 的隐函数唯一存在的充分而不是必要条件.

25. 函数 f, 使 $\max_y \min_x f(x,y) < \min_x \max_y f(x,y)$.

在 $[0,2] \times [0,4]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y) = 1 - (x - y + 1)^2,$$

则

$$\max_y f(x,y) = 1, \quad \min_x \max_y f(x,y) = 1;$$

$$\min_x f(x,y) = \begin{cases} 1 - (y-1)^2, & y \geqslant 2, \\ 1 - (3-y)^2, & y \leqslant 2, \end{cases} \qquad \max_y \min_x f(x,y) = 0.$$

因而

$$\max_y \min_x f(x,y) < \min_x \max_y f(x,y).$$

注 可以证明, 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\max_y \min_x f(x,y) \leqslant \min_x \max_y f(x,y)$$

(参看 [126], 中译本 p.108). 上述反例说明了这个不等式中的等号未必成立.

26. 函数 f, 使 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$, 但 (x_0,y_0) 并非 $f(x,y)$ 的极值点.

函数 $z=f(x,y)=y^2-x^2$ 的偏导数是 $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x, \frac{\partial z}{\partial y}=2y$, 所以

$$f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0.$$

当 $y=0$ 时, $z=-x^2$, 所以原点恰是这条抛物线的极大点; 而当 $x=0$ 时, $z=y^2$, 这样原点又是这条曲线的极小点. 由此可知, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点无极值.

注 对偏导数存在的函数 $f(x,y)$ 而言, 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极值的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0, \quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

上述反例说明了这个条件不是充分的.

27. 一个可微函数, 它在定义域内只有一个驻点, 而且这驻点是局部极大 (小) 点, 但它不是最大 (小) 点.

我们知道, 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) (有限或无穷, 开或闭) 上可微; 又在 (a,b) 内有唯一的驻点 x_0; 如果 x_0 是局部极大 (小) 点, 则 x_0 就是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最大 (小) 点. 于是, 我们可能会猜测, 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 上是可微的, 又在 D 内只有一个驻点 (x_0,y_0), 而且这驻点是局部极大 (小) 点, 那么, (x_0,y_0) 也一定就是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大 (小) 点.

这猜想是错的. 例如, 令

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

我们在矩形 $D: -1\leqslant x\leqslant 4,\ -1\leqslant y\leqslant 1$ 上来研究它的最大值. 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-8x+2y=0, \\ f_y(x,y)=2x-2y=0, \end{cases}$$

得两组根 $(0,0),(2,2)$. 但 $(2,2)$ 并不在 D 内, 所以 D 内只有一个驻点 $(0,0)$.

其次, 求二阶偏导数, $f_{xx}(x,y)=6x-8,\ f_{xy}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=-2$. 于是

$$f_{xx}(0,0)=-8<0, \quad f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=16-4>0.$$

故知 $(0,0)$ 确是函数在 D 内的局部极大点, 在这一点上有局部极大值 $f(0,0)=0$. 然而 0 并不是 f 在 D 上的最大值, 最大值出现在边界点 $(4,1)$ 上. $f(4,1)=7$.

这个函数在全平面上有两个驻点, 只是在 D 内有一个驻点. 于是自然要问: 是否存在二元可微函数, 它在全平面上只有一个驻点, 而且这驻点又是局部极大点, 但这一点并不是最大点? 这种函数的确是存在的. 下面的例子属于梁宗巨 [17]. 令

$$f(x,y)=8(\arctan x)^3-8(\arctan x)^2+(\arctan x)(\arctan y)-\frac{1}{8}(\arctan y)^2.$$

这函数是初等函数, 在全平面上可微, 解方程组

$$f_x(x,y)=24(\arctan x)^2\cdot\frac{1}{1+x^2}-16(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\arctan y$$
$$=0, \tag{1}$$

$$f_y(x,y)=(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{4}(\arctan y)\cdot\frac{1}{1+y^2}=0. \tag{2}$$

由 (2),

$$\arctan y=4\arctan x. \tag{3}$$

代入 (1) 后消去 $1/(1+x^2)$, 得

$$24(\arctan x)^2-16\arctan x+4\arctan x=0,$$

即

$$\arctan x(2\arctan x-1)=0.$$

由 $\arctan x=0$, 得驻点 $(0,0)$. 又将 $\arctan x=1/2$ 代入 (3), $\arctan y=2$, 无解. 这是因为

$$-\pi/2<\arctan y<\pi/2.$$

因此 $f(x,y)$ 在全平面上只有一个驻点 $(0,0)$. 为了判断它是不是极值点, 求二阶偏导数:

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}[24(\arctan x)^2-16\arctan x+\arctan y]$$
$$+\frac{1}{1+x^2}\left[48(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}-\frac{16}{1+x^2}\right],$$
$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2},$$
$$f_{yy}(x,y)=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}\left(\arctan x-\frac{1}{4}\arctan y\right)+\frac{1}{1+y^2}\left[-\frac{1}{4(1+y^2)}\right].$$

于是

$$f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=(-16)\left(-\frac{1}{4}\right)-1>0,$$

又

$$f_{xx}(0,0)=-16<0.$$

可知 $(0,0)$ 是局部极大点, $f(0,0)=0$ 是局部极大值. 但这并不是 $f(x,y)$ 的最大值, 例如

$$f(\tan 1,\tan 1)=8-8+1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}>0.$$

其实, 这函数的最大值是不存在的.

28. 函数 f, 它在某点的偏导数不存在, 但能在该点取得极值.

设

$$z=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

它是交于 y 轴的两个平面. 显然, 凡 $x=0$ 的点都是函数的局部极小点. 但是, 当 $x\geqslant 0$ 时, $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, 而当 $x<0$ 时, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, 所以函数 z 在 $x=0$ 处的偏导数不存在.

29. 有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数.

设

$$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y,$$

则

$$f_x(x,y)=-\sin x(1+e^y),$$
$$f_y(x,y)=e^y\cos x-e^y(1+y).$$

令 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$, 得 $x=\pm n\pi, y=(-1)^n-1\ (n=0,1,2,\cdots)$. 对于驻点 $P_{\pm n}\ (\pm n\pi,(-1)^n-1)$, 有

$$A=f_{xx}(x,y)|_{P_{\pm n}}=(-1)^{n+1}[1+e^{(-1)^n-1}],$$
$$B=f_{xy}(x,y)|_{P_{\pm n}}=0,$$
$$C=f_{yy}(x,y)|_{P_{\pm n}}=-e^{(-1)^n-1}.$$

当 n 为偶数时, $AC-B^2=2>0$, 又 $A=-2<0$, 故 $P_{\pm n}$ 为局部极大点, $f(\pm 2n\pi,0)=2$ 为局部极大值.

当 n 为奇数时, $AC-B^2=-(1+e^{-2})e^{-2}<0$, 故 $P_{\pm n}$ 不是局部极值点.

由此可知, 函数 f 有无穷多个局部极大点 $(\pm 2n\pi,0)\ (n=0,1,2,\cdots)$, 但是没有局部极小点.

30. 函数 f, 它在原点无局部极值, 但对任一过原点的直线, f 沿此直线上, 原点为其取得局部极小值的点.

设

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2),$$

则

$$f_x(x,y)=4x-3y^2,\quad f_y(x,y)=-6xy+4y^3.$$

令 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$, 即 $4x-3y^2=0, 2y(2y^2-3x)=0$, 得到 $x=y=0$.

对于点 $(0,0)$, 如果沿直线 $y=mx$, 则

$$f(x,y)=x^2(1-m^2x)(2-m^2x).$$

当 x 充分接近于零时, $f(x,mx)>0$, 而当 $x=0$ 时, $f(x,mx)=0$, 故沿着过点 $(0,0)$ 的每一条直线 $y=mx, f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得直正局部极小值. 但在点 $(0,0)$ 附近, 当 $x<y^2<2x$ 时, 将有 $f(x,y)<0$, 此即 $f(0,0)=0$ 并非函数的局部极小值.

我们还可进一步构造一个函数 f, 它在原点无局部极值, 但对任一过原点的形如 $y=cx^{m/n}$ 的曲线, 其中 c 为非零常数, m,n 为互质的正整数, n 为偶数时, $x\geqslant 0$, f 沿此曲线上, 原点为其取得局部极小值的点. 例如, 令

$$f(x,y)=\begin{cases}(y-e^{-1/x^2})(y-3e^{-1/x^2}), & x\neq 0,\\ y^2, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}g(x)=f(x,cx^{m/n})&=(cx^{m/n}-e^{-1/x^2})(cx^{m/n}-3e^{-1/x^2})\\&=x^{2m/n}(c^2-4ce^{-1/x^2}x^{-m/n}+3e^{-2/x^2}x^{-2m/n}).\end{aligned}$$

若 $x\neq 0$, 则 $x^{2m/n}>0$, 而

$$\lim_{x\to 0}(c^2-4ce^{-1/x^2}x^{-m/n}+3e^{-2/x^2}x^{-2m/n})=c^2>0,$$

所以当 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 充分小时, $g(x)>0$. 又当 $x=0$ 时, $g(x)=0$, 因此, $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得真正局部极小值 $g(0)=0$. 也就是说, 函数 f 沿曲线 $y=cx^{m/n}$ 上, $(0,0)$ 为其取得真正局部极小值的点.

另一方面, 在无限接近原点的形如 $(0,b)$ 的点. f 于其上取正值 $f(0,b)=b^2$; 而在无限接近原点的形如 $(a,2e^{-1/a^2})$ 的点, f 于其上取负值 $f(a,2e^{-1/a^2})=-e^{-2/a^2}$. 由此可见, f 在 $(0,0)$ 点没有局部极值.

后一例子是前一例子的改进.

31*. 函数 $f(x,y)$, 对每一 x, 它是 y 的 Borel 可测函数, 对每一 y, 它是 x 的 Borel 可测函数, 但 $f(x,y)$ 并不 (L) 可测.

设 A 为 $I=[0,1]\times[0,1]$ 中的一个非 (L) 可测子集, 它与每一平行于 x 轴的直线及每一平行于 y 轴的直线至多只有两个交点 (参看第十三章例 15). 在 I 上定义函数 f 如次:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A,\\ 0, & (x,y)\in I\backslash A,\end{cases}$$

由于 A 为 I 的非 (L) 可测子集, 故 f 是 I 上的非 (L) 可测函数.

另一方面, 对每一个集

$$A_{x_0}=\{y:(x_0,y)\in I\},\quad A_{y_0}=\{x:(x,y_0)\in I\},$$

它们至多仅有两个点, 因而对任意实数 a, 集

$$\{y:f(x_0,y)>a,\quad y\in A_{x_0}\}$$

与

$$\{x:f(x,y_0)>a,\quad x\in A_{y_0}\}$$

恒为 Borel 可测集, 从而 $f(x_0,y)$ 与 $f(x,y_0)$ 分别是 y 与 x 的 Borel 可测函数.

第十五章

二重积分

---

0. 引言.

设函数 $f(x,y)$ 在有界封闭可求积二维域 Ω 上有定义, 若极限

$$\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$$

存在, 其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i, \Delta y_j=y_{j+1}-y_j$, 而其和为对所有 i,j 使 $(x_i,y_j)\in\Omega$ 的那些值来求的, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 展布在 Ω 上的 (R) 二重积分, 记作

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy.$$

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则称

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

为函数 $f(x,y)$ 在 Ω 上的 (R) 累次积分.

现在介绍 (R) 二重广义积分的概念.

1° 无界域的情形　设二维域 Ω 是无界的, $\{\Omega_n\}$ 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意序列, 并且 Ω 中的每一点 P 从某一个号码起, 属于以后的一切的 Ω_n, 若 $f(x,y)$ 在每个 Ω_n 上均 (R) 可积, 又极限

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)dxdy$$

存在, 且此极限与序列 $\{\Omega_n\}$ 的选择无关, 则称函数 $f(x,y)$ 在 Ω 上 (R) 广义可积,

其积分值为

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)dxdy.$$

此时也称对应的积分为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

2° 无界函数的情形 设函数 $f(x,y)$ 在有界封闭域 Ω 内有唯一奇点 P, 即 $f(x,y)$ 在 P 的邻域内无界, 若对 P 的任意 ε 邻域 U_ε, $f(x,y)$ 在 $\Omega\backslash U_\varepsilon$ 上均 (R) 可积, 又极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \iint\limits_{\Omega\backslash U_\varepsilon} f(x,y)dxdy$$

存在且与 P 的 ε 邻域的选择无关, 则称函数 $f(x,y)$ 在 Ω 上 (R) 广义可积, 其积分值为

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0+} \iint\limits_{\Omega\backslash U_\varepsilon} f(x,y)dxdy.$$

此时也称对应的积分为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

关于 (L) 二重积分的定义, 完全类似于 (L) 单重积分的定义, 只需把单变量改为二变量, 把线性测度改为平面测度, 故这里不再赘述.

1. 两个 (R) 累次积分存在而不相等的函数.

设

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他的 } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

对于 $0 < y < 1$, 有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1,$$

因而

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 1dy = 1.$$

同样地, 对于 $0 < x < 1$, 有

$$\int_0^1 f(x,y)dy = -\int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1,$$

因而

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 (-1)dx = -1.$$

可见

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy.$$

2. 两个 (R) 累次积分存在且相等, 但 (R) 二重积分不存在的函数.

若 x 是一有理数, 则可把它表作 p_x/q_x, 其中 p_x 与 q_x 是互质的整数且 $q_x > 0$. 今在正方形 $D = [0,1] \times [0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \text{ 为有理点且 } q_x = q_y, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

我们先证 f 在 D 上的两个 (R) 累次积分均存在且相等.

事实上, 对固定的 $y \in [0,1]$, 当 y 为无理数时, $\varphi(x) = f(x,y) \equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

而当 y 为有理数时, y 可表作 p/q, 而分母等于 q 的有理数不超过 q 个, 所以至多在 q 个点 x 上, $f(x,y) = 1$; 而在其他的点上, $f(x,y) = 0$. 由此可见, $\varphi(x) = f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 且

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

总之, 对任一 $y \in [0,1]$, 恒有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0,$$

从而

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

同理可证

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = 0.$$

为证 f 在 D 上的 (R) 二重积分不存在, 我们只要证明 f 在 D 上无处连续即可. 为此, 令 $G = \{(x,y) : (x,y) \text{ 为 } D \text{ 中的有理点且 } q_x = q_y\}$. 易证, G 在 D 内稠密, 即 D 中的任一开区间 $(a,b)\times(c,d)$ 都含有 G 的点. 这里 $0 \leqslant a < b \leqslant 1, 0 \leqslant c < d \leqslant 1$. 事实上, 对 x 轴上的区间 $[0,1]$ 作等分:

$$2 \text{ 等分}, 3 \text{ 等分}, \cdots, n \text{ 等分}, \cdots,$$

依自然数序列作下去, 则必存在自然数 N_1, 使

$$1/N_1 < b - a.$$

于是, 当 $n \geqslant N_1$ 时, 对任一 n 等分, 必有一个分点落在 (a,b) 之中. 设此分点为 m_n/n, 即有点集

$$\{m_n/n : n = N_1, N_1 + 1, \cdots\}$$

包含于 (a,b) 之中.

同理, 存在自然数 N_2, 使 $1/N_2 < d - c$, 当 $n \geqslant N_2$ 时, 必有落在 (c,d) 内的分点 r_n/n. 于是,$\{r_n/n : n = N_2, N_2 + 1, \cdots\}$ 构成 (c,d) 的子集.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则有

$$\{m_n/n: n=N,N+1,\cdots\}\subset(a,b),$$

$$\{r_n/n: n=N,N+1,\cdots\}\subset(c,d).$$

由于素数是无穷多的, 所以在 N 之后的自然数中必有素数 q, 而 $m_q/q, r_q/q$ 皆为不可约分式, 它们分别落在 (a,b) 与 (c,d) 之中, 亦即

$$(m_q/q, r_q/q)\in(a,b)\times(c,d).$$

因此, G 在 D 中稠密.

若 $(x,y)\in G$, 则 $f(x,y)=1$. 由于 (x,y) 的任一邻域都含有 $D\backslash G$ 的点, 在这种点上, 函数值等于零, 所以 f 在 G 上处处不连续.

若 $(x,y)\in D\backslash G$, 则 $f(x,y)=0$. 由于 G 在 D 内稠密, 所以 (x,y) 的任一邻域都含有 G 的点, 在这种点上, 函数值等于 1, 因而 f 在 $D\backslash G$ 上也处处不连续.

总之, 我们已经证明了 f 在 D 上无处连续, 从而 f 在 D 上并不 (R) 可积.

这个例子是由 Pringsheim [130] 作出的.

3. (R) 二重积分存在而两个 (R) 累次积分都不存在的函数.

若 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 表分母为 q_x. 今在正方形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/q_x+1/q_y, & x\text{ 与 }y\text{ 都是有理数},\\ 0, & \text{在其他情形}.\end{cases}$$

我们将要证明, f 在 D 上是 (R) 可积的. 为此, 我们先来证明 f 在 D 中任一无理点处连续, 而在其他的点处间断.

事实上, 设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一无理点, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 只有有限个小于或等于 $2/\varepsilon$ 的正整数, 因此, 使得 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2, 1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 $x=p_x/q_x, y=p_y/q_y$ 只有有限个. 于是, 存在 x_0 (注意, x_0 是无理数!) 的 δ-邻域, 使得适合不等式 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 x 全在 δ-邻域之外. 同样, 由于 y_0 也是无理数, 故存在 y_0 的 ξ-邻域, 使得适合不等式 $1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 y 全在 ξ-邻域之外. 因此, 存在 (x_0,y_0) 的一个 η-邻域, 在这个邻域之中, 若 (x,y) 为有理点, 则 $1/q_x+1/q_y<\varepsilon$; 若 (x,y) 不是有理点, 则 $f(x,y)=0$; 而在点 (x_0,y_0) 处, $f(x_0,y_0)=0$. 由此可知, 当点 (x,y) 落在 (x_0,y_0) 的 η-邻域时, 就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

于是, f 在 D 中无理点上的连续性得以证明.

设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一有理点, 则

$$f(x_0,y_0)=1/q_{x_0}+1/q_{y_0}=r>0\quad(r\text{ 为一定数}).$$

因为 (x_0,y_0) 的任一 δ-邻域中都含有无理点 (x,y), 在这种点上 $f(x,y)=0$, 所以当取 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<r)$ 时, 就无法使

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

因此, f 在 D 中的有理点上不连续.

设 (x_0, y_0) 为 D 中任一其他的点, 即 x_0, y_0 不全为有理数, 也不全为无理数. 不妨设 x_0 为有理数而 y_0 为无理数, 此时 $f(x_0, y_0) = 0$. 在 (x_0, y_0) 的任一 δ-邻域中都有有理点 (x_0, y), 在这种点上, 有

$$f(x_0, y) = 1/q_{x_0} + 1/q_y > 1/q_{x_0} > 0.$$

于是, 当取 $0 < \varepsilon < 1/q_{x_0}$ 时, 就无法使

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| < \varepsilon.$$

因此, f 在 (x_0, y_0) 点不连续.

现设 I 为 $D = [0,1] \times [0,1]$ 中的全体无理点所成之集, 而 I_1 与 I_2 分别为 x 轴上的区间 $[0,1]$ 与 y 轴上的区间 $[0,1]$ 中的全体无理点, 则有

$$I = I_1 \times I_2.$$

而 $mI = mI_1 \times mI_2 = 1$ (参看 [6], pp.51—54), 由此得到 $m(D \backslash I) = 0$, 所以 f 在 D 上的不连续点所成之集其测度为零. 又, f 在 D 上有界. 因此, f 在 (D) 上是 (R) 可积的.

最后, 我们证明 f 在 D 上的两个 (R) 累次积分都不存在, 从而不能把 f 在 D 上的二重积分化为累次积分来计算.

我们任意固定 $y \in [0,1]$, 当 y 为有理数时, q_y 为一确定的正整数, 且有

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/q_x + 1/q_y, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

易见, $\varphi(x) = f(x, y)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上不 (R) 可积, 于是也就根本谈不上 f 在 D 上的 (R) 累次积分.

对于固定的 $x \in [0,1]$, 也有同样的结果.

注　我们有如下的命题: 设 $f(x, y)$ 是定义在矩形 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上的函数, 如果

(i) 二重积分

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy$$

存在;

(ii) 对每一 $x \in [a,b]$, 单积分

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

也存在. 那么累次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

同样存在且等式

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

成立 (参看 [33], 中译本 pp.136—139).

例 2 与例 3 表明了命题中的条件 (i) 与 (ii) 是彼此无关的.

4. (R) **二重积分不存在, 而只有一个** (R) **累次积分存在的函数.**

第一例 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}, \\ 2y, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

于是, 对任一 $x\in[0,1]$, 恒有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=1,$$

从而

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=1.$$

但是, 对于固定的 $y\neq 1/2$, 函数 $\varphi(x)=f(x,y)$ 在区间 $[0,1]$ 上无处连续, 因而 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积, 所以累次积分

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

不存在.

又, 不难看出, 当 $y\neq 1/2$ 且 x 为无理数时, f 在点 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 不连续, 而这种点的全体所成之集其测度为 1, 因而 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上并不 (R) 可积.

这个例子是由 Thomae 作出的.

第二例 若 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 表分母为 q_x. 今在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y) \text{ 为有理点且 } q_x=q_y, \\ 0, & \text{在其他情形}.\end{cases}$$

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 三分集, A 为 $[0,1]$ 中的全体有理数的集, 并设

$$g(x,y)=f(x,y)+\varphi_A(x)\varphi_C(y),$$

这里, φ_A 代表集 A 的特征函数. 于是, (R) 二重积分 $\int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy$ 不存在 (参看例 2).

任取 $x_0\in[0,1]$, 若 x_0 是无理数, 则 $f(x_0,y)\equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x_0,y)dy=0.$$

若 x_0 是有理数 p_{x_0}/q_{x_0}, 则因分母等于 q_{x_0} 的有理数不超过 q_{x_0} 个, 所以至多在 q_{x_0} 个 y 上, $f(x_0,y)=1$, 而在其他的 y 上, $f(x_0,y)=0$. 由此可见, $f(x_0,y)$ 在 $[0,1]$ 上 (R) 可积, 且

$$\int_0^1 f(x_0,y)dy=0.$$

又由于 Cantor 三分集的特征函数 $\varphi_c(y)$ 在 $[0,1]$ 上是 (R) 可积的, 且

$$\int_0^1 \varphi_c(y)dy = 0.$$

因此, 对任一 $x_0 \in [0,1]$, 都有

$$\int_0^1 g(x_0,y)dy = \int_0^1 f(x_0,y)dy + \varphi_A(x_0)\int_0^1 \varphi_c(y)dy = 0.$$

所以 (R) 累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)dy$ 存在.

另一方面, 因为 $\varphi_A(x)$ 在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积, 故并非对每一 $y_0 \in [0,1]$, $g(x,y_0)$ 关于 x 在 $[0,1]$ 上都 (R) 可积. 也就是说, (R) 累次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)dx$$

并不存在.

5. (R) **二重积分存在, 但只有一个** (R) **累次积分存在的函数.**

若 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 表分母为 q_x. 在 $D = [0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/q_x, & (x,y) \text{ 为有理点}, \\ 0, & \text{在其他情形}. \end{cases}$$

易见, f 在 D 上的不连续点只有可数多个, 因而 f 在 D 上 (R) 可积, 且

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = 0.$$

对任意的 $y \in [0,1]$, 若 y 为无理数, 则 $\varphi(x) = f(x,y) \equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

若 y 为有理数, 则

$$\varphi(x) = f(x,y) = \begin{cases} 1/q_x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

此时也有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

总之, 对任何 $y \in [0,1]$, 都有 $\int_0^1 f(x,y)dx = 0$, 所以得到

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

另一方面, 当 $x_0 \in [0,1]$ 且 x_0 为有理数时,

$$\psi(y) = f(x_0,y) = \begin{cases} 1/q_{x_0}, & y \text{ 为有理数}, \\ 0, & y \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

由于 $\psi(y)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 因而它在 $[0,1]$ 上并不 (R) 可积, 故累次积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$$

也就不存在.

6. 一个发散的广义 (R) 二重积分, 它的两个累次积分都存在.

第一例 考虑广义 (R) 二重积分

$$\iint\limits_{D} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy,$$

这里, $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 令 $K(\varepsilon,\varepsilon')$ 是图 29 所示的闭集合, 它是由 D_1, D_2 两个部分组成. 计算累次积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right\}dy &= \int_0^1\left\{\int_0^1\left(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2y}{(x+y)^3}\right)dx\right\}dy\\ &= \int_0^1\left[-\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &= -\int_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right\}dx &= \int_0^1\left\{\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left[-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此, 两个累次积分都存在.

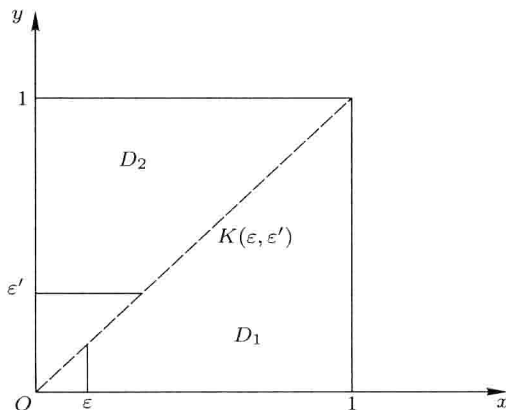


图 29

另一方面,

$$\iint\limits_{K(\varepsilon,\varepsilon')} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy,$$

而

$$\iint\limits_{D_1} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \int_\varepsilon^1 dx \int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}dy$$

$$= \int_\varepsilon^1 \left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{4x}dx = -\frac{1}{4}\ln\varepsilon;$$

$$\iint\limits_{D_2} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \int_{\varepsilon'}^1 dy \int_0^y \frac{x-y}{(x+y)^3}dx$$

$$= \int_{\varepsilon'}^1 \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{y}dy = \frac{1}{4}\ln\varepsilon'.$$

因此

$$\iint\limits_{K(\varepsilon,\varepsilon')} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = -\frac{1}{4}\ln\varepsilon + \frac{1}{4}\ln\varepsilon' = \frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

如果 $\varepsilon' = \varepsilon$, 当 $\varepsilon \to 0+$ 时, 则 $K(\varepsilon,\varepsilon')$ 收敛于 D, 且二重积分的极限值为 0; 如果 $\varepsilon' = 2\varepsilon$, 当 $\varepsilon \to 0+$ 时, $K(\varepsilon, 2\varepsilon)$ 收敛于 D, 且二重积分的极限值为 $\ln 2/4$. 因此, 广义二重积分

$$\iint\limits_D \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$$

发散.

第二例 在 $D = [1,+\infty) \times [1,+\infty)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

则

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \int_1^{+\infty} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=1}^{y=+\infty} dx$$

$$= -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_1^{+\infty} \left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{x=1}^{x=+\infty} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

可见 f 在 D 上的两个累次积分都收敛.

其次证明广义 (R) 二重积分

$$\iint\limits_{D} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

发散. 为此, 令 $D_1=\{(x,y):1\leqslant x\leqslant b, 1\leqslant y\leqslant b\}$, 当 $b\to+\infty$ 时, D_1 趋于 D. 此时

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b dx\int_1^b \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=1}^{y=b}dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{b}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan\frac{x}{b}-\arctan x\right]_{x=1}^{x=b}\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(2\arctan 1-\arctan\frac{1}{b}-\arctan b\right)=0.\end{aligned}$$

然后再令 $D_2=\{(x,y):1\leqslant x\leqslant 2b, 1\leqslant y\leqslant b\}$, 当 $b\to+\infty$ 时, D_2 趋向于 D. 此时

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_2}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^{2b}\left(\frac{b}{b^2+x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan\frac{x}{b}-\arctan x\right]_{x=1}^{x=2b}\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(\arctan 2-\arctan 2b-\arctan\frac{1}{b}+\arctan 1\right)\\ &= \arctan 2-\frac{\pi}{4}\neq 0.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy\neq\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_2}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy.$$

可见广义二重积分 $\iint_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ 发散.

7. 广义 (R) 二重积分 $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ 存在, 且对每一 $x\in[0,1]$, 积分 $\int_0^1 f(x,y)dy$ 存在, 但累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在的函数 f.

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}2^n, & x=(2m-1)/2^n \text{ 且 } 0<y\leqslant 1/2^n,\\ & \quad n=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots,2^{n-1},\\ 0, & \text{在其他情形}.\end{cases}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 在矩形 $[0,1] \times [\varepsilon, 1]$ 上, 函数 f 只在有限个直线段上 (即满足 $1/2^n \geqslant \varepsilon$ 的直线段 $x = (2m-1)/2^n$ 上) 异于 0, 故

$$\iint\limits_{[0,1]\times[\varepsilon,1]} f(x,y)dxdy = 0.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, 就可得到

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = 0.$$

也就是说, f 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的广义 (R) 二重积分存在.

另一方面, 任取 $x \in [0,1]$, 若 $x \neq (2m-1)/2^n$, 则 $f(x,y) \equiv 0$, 从而

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0.$$

若 $x = (2m-1)/2^n$, 则

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x,y)dy = 1.$$

因此, 对每一 $x \in [0,1]$, 积分

$$\int_0^1 f(x,y)dy$$

存在. 由于形如 $(2m-1)/2^n$ 的点的全体在 $[0,1]$ 内是稠密的, 所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而累次积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$$

不存在.

注 对于常义 (R) 二重积分, 我们有如下的命题: 设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上的函数, 如果

(i) 二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

存在;

(ii) 对每一 $x \in [a,b]$, 单积分

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

也存在, 那么累次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

同样存在且等式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

成立 (参看 [33], 中译本 pp.136—139). 上述反例说明了对于广义 (R) 二重积分而言, 相应的命题并不成立.

8. 函数 $f(x)$ 与 $g(y)$, 它们分别在 $0 \leqslant x < +\infty$ 与 $0 \leqslant y < +\infty$ 上广义 (R) 可积, 但 $f(x)g(y)$ 在 $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ 上并不广义 (R) 可积.

在 $I_1 = [0,+\infty)$ 上定义函数

$$f(x) = \sin x/n, \quad 2(n-1)\pi \leqslant x < 2n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

又在 $I_2 = [0,+\infty]$ 上定义函数

$$g(y) = \sin y/n, \quad 2(n-1)\pi \leqslant y < 2n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

并令

$$h(x,y) = f(x)g(y), \quad (x,y) \in I_1 \times I_2.$$

易见, $f(x)$ 与 $g(y)$ 分别在 I_1 与 I_2 上是广义 (R) 可积的, 且其积分值为 0.

今证 $h(x,y)$ 在 $I_1 \times I_2$ 上并不广义 (R) 可积. 事实上, 如果 $h(x,y)$ 在 $I_1 \times I_2$ 上是广义 (R) 可积的, 那么 $|h(x,y)|$ 在 $I_1 \times I_2$ 上也应当是广义 (R) 可积的 (注意, 广义 (R) 二重积分是一种绝对收敛积分, 这有别于广义 (R) 一重积分, 参看 [33], 中译本 pp.220—225). 然而

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_0^{2n\pi} \int_0^{2m\pi} |h(x,y)| dx dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} |f(x)| \left(\lim_{m\to\infty} \int_0^{2m\pi} |g(x)| dy \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} |f(x)| \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{|\sin y|}{k} dy \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} |f(x)| \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{4}{k} \right) dx = +\infty.
\end{aligned}$$

因此, $|h(x,y)|$ 在 $I_1 \times I_2$ 上并不广义 (R) 可积, 从而 $h(x,y)$ 在 $I_1 \times I_2$ 上也不广义 (R) 可积.

注 对于 (L) 积分, 我们有如下的命题: 设 $f(x)$ 在 R^1 上可积, $g(y)$ 在 R^1 上可积, 则 $f(x)g(y)$ 在 $R^1 \times R^1$ 上可积 (参看 [6], pp.116—117). 上述反例说明了对于广义 (R) 二重积分而言, 相应的命题并不成立.

又, 如果 $f(x)$ 与 $g(y)$ 分别在有限区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 上 (R) 可积, 那么 $f(x)g(y)$ 在 $[a,b] \times [c,d]$ 上也必 (R) 可积 (参看 [33], 中译本, p.145). 上述反例也说明了不能把这个命题推广到无穷区间的情形.

9. $[0,1] \times [0,1]$ 上的一个 (L) 可积函数 $f(x,y)$, 而并不对每一 $x \in [0,1]$, 使把 $f(x,y)$ 看作 y 的函数时, 它在 $[0,1]$ 上是 (L) 可积的.

第一例 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y^2, & x = 1/2 \text{ 且 } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{在其他情形}. \end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是 (L) 可积的, 且其积分值为 0. 但是, $f(1/2,y)$ 在 $[0,1]$ 上并不 (L) 可积.

第二例 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上作 Cantor 三分集 C, 过 C 的每一点作直线段 $0\leqslant y\leqslant 1$, 再在每条这种直线段上作不可测集 V_x, 这里 $x\in C$. 然后在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\backslash C, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x\in C, y\in V_x,\\ 0, & x\in C, y\overline{\in}V_x.\end{cases}$$

由于 $\cup_{x\in C}V_x$ 是 R^2 中的零测度集, 所以 $f(x,y)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的有界可测函数, 因而它在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是 (L) 可积的.

另一方面, 当 $x_0\in C$ 时, $f(x_0,y)$ 在 $[0,1]$ 上并不 (L) 可测, 从而它在 $[0,1]$ 上并不 (L) 可积.

注 我们有如下的 Fubini 定理: 设 $f(x,y)$ 是 $R^2=R^1\times R^1$ 上的 (L) 可积函数, 则

(i) 几乎对所有的 $x\in R^1$, $f(x,y)$ 是 y 的 (L) 可积函数;

(ii) 几乎处处有定义的函数

$$g(x)=\int\limits_{R^1}f(x,y)dy$$

在 R^1 上是 (L) 可积的;

(iii) 有下述等式成立:

$$\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=\int\limits_{R^1}dx\int\limits_{R^1}f(x,y)dy$$

(参看 [6], pp.114—116). 上述反例说明了 Fubini 定理的第一结论不能加强为对所有的 $x\in R^1$, 将 $f(x,y)$ 看作 y 的函数时乃为 R^1 上的 (L) 可积函数.

10*. $[0,1]\times[0,1]$ 上的一个不可测函数, 它的两个 (L) 累次积分均存在且相等.

设 A 为 $I=[0,1]\times[0,1]$ 中的一个不可测子集, 它与每一平行于 x 轴的直线及每一平行于 y 轴的直线至多只有两个交点 (参看第十三章例 15). 在 I 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in A,\\ 0, & (x,y)\in I\backslash A.\end{cases}$$

由于 A 为 I 的不可测子集, 所以 f 是 I 上的一个不可测的函数, 从而它在 I 上的 (L) 二重积分也不存在.

另一方面, 对每一 $x_0\in[0,1]$ 及 $y_0\in[0,1]$, 集 $A_{x_0}=\{y:(x_0,y)\in I\}$ 与集 $A_{y_0}=\{x:(x,y_0)\in I\}$ 至多仅由两个点组成, 所以对每一 $x\in[0,1]$, 都有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=0.$$

同理, 对每一 $y \in [0,1]$, 也有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

因此

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx.$$

11. $[0,1] \times [0,1]$ **上一不可测函数, 它的一个** (L) **累次积分存在而另一个不存在.**

构造这个例子, 需要连续统的假设. 根据连续统的假设, $[0,1]$ 中的点一一对应于第一、二类序数 (参看 [89]):

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1}, \cdots, a_\xi, \cdots. \tag{1}$$

在 x 轴的区间 $[0,1]$ 中取不可测集 A, 用 A 作 R^2 中的集:

$$E = \{(x,y) : x \in A, \text{ 在 (1) 中 } x \text{ 位于 } y \text{ 前面}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

并在 $[0,1] \times [0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E, \\ 0, & (x,y) \overline{\in} E. \end{cases}$$

(i) $\int_0^1 f(x,y_0)dx$ 的计算.

任取 $y_0 \in [0,1]$. 设在 (1) 中, $y_0 = a_\mu$. 在 y_0 前面的只有可数个. 由 $f(x,y)$ 的定义, $f(x,y_0)$ 除可数个点外等于 0. 所以

$$\int_0^1 f(x,y_0)dx = 0,$$

从而

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

(ii) $\int_0^1 f(x_0,y)dy$ 的计算.

a) $x_0 \in A$ 的情形. 设在 (1) 中, $x_0 = a_\nu$. 若 $(x_0,y) \in E$, 则 y 在 (1) 中的号码 $> \nu$; 相反的时候, y 在 (1) 中的号码 $< \nu$. 所以 $f(x_0,y)$ 除可数个点外等于 1. 即

$$\int_0^1 f(x_0,y)dy = 1.$$

b) $x_0 \overline{\in} A$ 的情形. 根据 E 的定义, 任何 y 都不使 (x_0,y) 属于 E. 于是由 $f(x_0,y)$ 的定义, $f(x_0,y) = 0$, 所以

$$\int_0^1 f(x_0,y)dy = 0.$$

因此, $\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$ 成了不可测集 A 的特征函数, 所以 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在.

(iii) $f(x,y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上是不可测的.

事实上, 如若不然, 则 f 是 $[0,1] \times [0,1]$ 上的有界可测函数, 从而它在 $[0,1] \times [0,1]$ 上是 (L) 可积的. 于是, 据 Fubini 定理, f 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的两个累次积分均应存在而且相等. 此为矛盾.

12*. $[0,1]\times[0,1]$ 上的一个不可测函数, 它的两个 (L) 累次积分存在而不相等.

在例 11 里, 不取 A 而取 $[0,1]$, 则有

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=0,\quad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=1.$$

易见, 这个函数不会是可测的.

13*. 一个可测函数, 它的两个 (L) 累次积分一个存在而另一个不存在.

第一例 在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} a_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right),\\ b_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu}},1-\dfrac{1}{2^{\nu+1}}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right),\\ 0, & \text{在其他情形}. \end{cases}$$

这里, $a_1=2, b_\nu=-2a_\nu, a_{\nu+1}=(-1)^\nu 2^{2\nu+1}-2b_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$. 易见, f 是 I 上的可测函数, 且对任一 $y\in[0,1]$, 若 $y\overline{\in}[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu})$, 则 $f(x,y)\equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

若 $y\in[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu})$, 则

$$\int_0^1 f(x,y)dx=\int_{1-\frac{1}{2^{\nu-1}}}^{1-\frac{1}{2^\nu}} a_\nu dx+\int_{1-\frac{1}{2^\nu}}^{1-\frac{1}{2^{\nu+1}}} b_\nu dx$$

$$=\frac{1}{2^\nu}a_\nu-\frac{1}{2^{\nu+1}}\cdot 2a_\nu=0.$$

总之, 对每一 $y\in[0,1]$, 都有

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0,$$

因此

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

另一方面, 对于 $1-\frac{1}{2^{\nu-1}}\leqslant x<1-\frac{1}{2^\nu}\ (\nu=1,2,\cdots)$, 有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_{1-\frac{1}{2^{\nu-2}}}^{1-\frac{1}{2^{\nu-1}}} b_{\nu-1}dy+\int_{1-\frac{1}{2^{\nu-1}}}^{1-\frac{1}{2^\nu}} a_\nu dy$$

$$=\frac{b_{\nu-1}}{2^{\nu-1}}+\frac{a_\nu}{2^\nu}=\frac{b_{\nu-1}}{2^{\nu-1}}+\frac{1}{2^\nu}[(-1)^{\nu-1}2^{2\nu-1}-2b_{\nu-1}]$$

$$=(-1)^{\nu-1}2^{\nu-1}.$$

令

$$A=\bigcup_\nu\left[1-\frac{1}{2^{2\nu-2}},1-\frac{1}{2^{2\nu-1}}\right),$$

$$B=\bigcup_\nu\left[1-\frac{1}{2^{2\nu-1}},1-\frac{1}{2^{2\nu}}\right),$$

则

$$\int_A dx \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{2}\sum_{\nu}(-1)^{2\nu-2} = +\infty,$$

$$\int_B dx \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{2}\sum_{\nu}(-1)^{2\nu-1} = -\infty.$$

由此可见, 累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在.

第二例 在 $I = [0,1] \times [0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\Big/\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3, & 0 < y < \left|x-\dfrac{1}{2}\right|, \\ 0, & y \geqslant \left|x-\dfrac{1}{2}\right|, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

于是, 当 $0 < y < 1/2$ 时,

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^{-y+\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3}dx + \int_{y+\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}\right]_{x=0}^{x=-y+\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}\right]_{x=y+\frac{1}{2}}^{x=1} = 0.$$

而当 $y \geqslant 1/2$ 或 $y = 0$ 时,

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0,$$

因此

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

另一方面,

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{-x+\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3}dy = -\frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x = \dfrac{1}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3}dy = \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

因此, 累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在.

这个例子是由 Sierpiński [152] 作出的.

14. 一个可测函数, 它的两个 (L) 累次积分存在而不相等.

在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y)=\begin{cases}a_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right),\\ b_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu}},1-\dfrac{1}{2^{\nu+1}}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right),\\ 0, & \text{在其他情形,}\end{cases}$$

其中 $a_1=2, b_\nu=-2a_\nu, a_{\nu+1}=2^{\nu+1}-2b_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$. 于是, f 是 I 上的可测函数, 且对任何 $y\ (0\leqslant y<1)$, 都有

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

而对任何 $x\ (0\leqslant x<1)$, 都有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=1.$$

因此

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=0,\quad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=1.$$

15. 一个可测函数, 它的两个 (L) 累次积分存在且相等, 但它并不 (L) 可积.

第一例 在 $D=[-1,1]\times[-1,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y)=\begin{cases}xy/(x^2+y^2)^2, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

若将两个变量 x,y 中固定一个, 则 $f(x,y)$ 乃是另一个变量的连续函数, 所以

$$\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy$$

对于 $[-1,1]$ 中的所有的 x 是存在的. 由于被积函数是奇函数, 所以积分之值等于零, 由是

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx=0.$$

可是 f 在 D 上并不 (L) 可积. 因为如果 f 在 D 上是 (L) 可积的, 那么 f 在部分正方形 $D^*=[0,1]\times[0,1]$ 上亦应为 (L) 可积. 于是, 应该存在着有限积分:

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

但这句话并不成立. 因为当 $x\neq 0$ 时,

$$\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+1)},$$

这个函数在 $[0,1]$ 上并不 (L) 可积, 乃得矛盾. 故 f 在 D 上也不 (L) 可积.

第二例 在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y)=\begin{cases} a_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right), \\ b_\nu, & (x,y)\in\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu}},1-\dfrac{1}{2^{\nu+1}}\right)\times\left[1-\dfrac{1}{2^{\nu-1}},1-\dfrac{1}{2^\nu}\right), \\ 0, & \text{在其他情形,} \end{cases}$$

这里, $a_1=2, b_\nu=-2a_\nu, a_{\nu+1}=2^{\nu+1}-2b_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$. 令

$$f^*(x,y)=f(x,y)+f(y,x),$$

则 f^* 是 I 上的可测函数, 且

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f^*(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f^*(x,y)dx$$

(参看例 14). 今证 f^* 在 I 上并不 (L) 可积. 事实上, 应用归谬法可证

$$a_\nu=2^\nu(2^\nu-1).$$

又

$$m\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right)\times\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right)=\frac{1}{2^{2\nu}},$$

$$m\left[1-\frac{1}{2^{\nu}},1-\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\times\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right)=\frac{1}{2^{2\nu+1}}.$$

令

$$A=\bigcup_\nu\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right)\times\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right),$$

$$B=\bigcup_\nu\left[1-\frac{1}{2^{\nu}},1-\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\times\left[1-\frac{1}{2^{\nu-1}},1-\frac{1}{2^\nu}\right),$$

则

$$\iint_A f^*(x,y)dxdy=2\sum_\nu a_\nu\cdot\frac{1}{2^{2\nu}}=2\sum_\nu\frac{2^\nu-1}{2^\nu}=+\infty,$$

$$\iint_B f^*(x,y)dxdy=\sum_\nu b_\nu\cdot\frac{1}{2^{2\nu+1}}=-\sum_\nu a_\nu\cdot\frac{1}{2^{2\nu}}=-\infty.$$

由此可知, f^* 在 I 上不 (L) 可积.

注 我们有如下的命题: 设 $f(x,y)$ 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的非负可测函数, 且 (L) 累次积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \quad 与 \quad \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

中有一个存在, 那么 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上必定 (L) 可积, 此时, 另一个 (L) 累次积分也存在且等于 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的积分值 (参看 [6], p.116).

上述反例说明了在这个命题中, 函数 f 的非负性的条件不可去掉.

16*. $[0,1]\times[0,1]$ 上的一个函数 f, 使对任意可测集 $E\subset[0,1], F\subset[0,1]$, 恒有 $\int_E dx\int_F f(x,y)dy=\int_F dy\int_E f(x,y)dx$, 但 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上仍不 (L) 可积.

下面的例子是由 Фихтенгольц [34] 作出的. 为构造这个例子, 先要做一些准备工作.

在 R^2 中, 取平行于坐标轴的矩形

$$D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\},$$

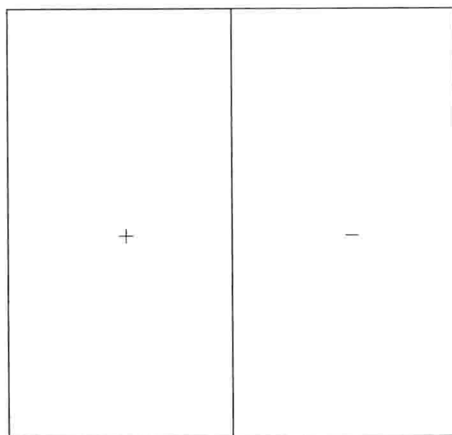
简记为 $[a,b]\times[c,d]$. 用与 x 轴平行的直线 n 等分 D 为

$$D_\nu=[a,b]\times[c_\nu,d_\nu],\quad \nu=1,2,\cdots,n.$$

再用与 y 轴平行的直线, $z_\nu=l_1l_2\cdots l_\nu$ 等分 D_ν 为

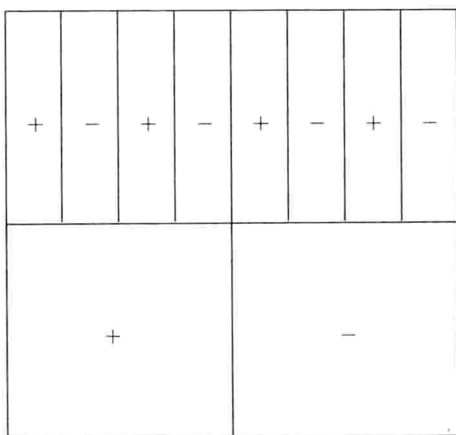
$$D_\nu^{(\lambda_\nu)}=[a_\nu^{(\lambda_\nu)},b_\nu^{(\lambda_\nu)}]\times[c_\nu,d_\nu],$$

这里 $\lambda_\nu=1,2,\cdots,z_\nu$; l_ν 是任意的偶数 (见图 30 和图 31).



$n=1,z_1=l_1=2$

图 30



$n=2,z_2=l_1l_2=8$

图 31

作函数 $\varphi(x,y)$, 在 $D_\nu^{(\lambda_\nu)}$ $(\lambda_\nu=1,2,\cdots,z_\nu;\nu=1,2,\cdots,n)$ 上, 令

$$\varphi(x,y)=(-1)^{\lambda_\nu-1}.$$

我们先来证明: 如果 E,F 分别是区间 $[a,b],[c,d]$ 的可测集, 那么

$$\int_E dx\left|\int_F\varphi(x,y)dy\right|<\frac{|D|}{\sqrt{n}},\quad \int_F dy\left|\int_E\varphi(x,y)dx\right|<\frac{|D|}{\sqrt{n}},$$

这里, $|D|$ 代表矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 的面积.

在证明中, 我们把 $\iint_A\varphi(x,y)dxdy$ 简称为 A 的积分 (附图说明亦如此).

(i) 考虑

$$\Delta_n^{(\lambda_n)}=[a_n^{(\lambda_n)},b_n^{(\lambda_n)}]\times[c,d],\quad \lambda_n=1,2,\cdots,z_n.$$

$n=1$ 时,

$$有\ \frac{z_1}{2}\ 个\ \Delta_1^{(\lambda_1)}\ 的积分是\ \frac{|D|}{z_1},$$

$$有\ \frac{z_1}{2}\ 个\ \Delta_1^{(\lambda_1)}\ 的积分是\ \frac{-|D|}{z_1},$$

$n=2$ 时,

$$有\ \frac{z_2}{4}\ 个\ \Delta_2^{(\lambda_2)}\ 的积分是\ \frac{|D|}{z_2},$$

$$有\ \frac{z_2}{2}\ 个\ \Delta_2^{(\lambda_2)}\ 的积分是\ 0,$$

$$有\ \frac{z_2}{4}\ 个\ \Delta_2^{(\lambda_2)}\ 的积分是\ \frac{-|D|}{z_2}.$$

一般则有

$$\binom{n}{\nu} 2^{-n} z_n\ 个\ \Delta_n^{(\lambda_n)}\ 的积分是\ (n-2\nu)\frac{|D|}{nz_n}, \tag{1}$$

这里 $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$.

事实上, 设将 D 分成

$$\Delta_{n-1}^{(\lambda_{n-1})} = \left[a_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}, b_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}\right] \times [c, d] \quad (\lambda_{n-1} = 1, 2, \cdots, z_{n-1})$$

时 (1) 是对的. 积分是

$$(n-1-2\nu)\frac{|D|}{(n-1)z_{n-1}}$$

的每个 $\Delta_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}$ 被分成 l_n 个 $\Delta_n^{(\lambda_n)}$, 其中一半的积分是

$$(n-2\nu)\frac{|D|}{nz_n}, \tag{2}$$

另一半是

$$[n-2(\nu+1)]\frac{|D|}{nz_n}. \tag{3}$$

注意, $\frac{|D|}{nz_n}$ 是这分法里最小的 "矩形单位" 的面积. 分出来的 $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ 符号未动的应在 $(n-1-2\nu)\frac{|D|}{nz_n}$ 再添上一个 $\frac{|D|}{nz_n}$. 符号变动的应在 $(n-1-2\nu)\frac{|D|}{nz_n}$ 再减去一个 $\frac{|D|}{nz_n}$, 即得 (2), (3). 所以积分等于 $(n-2\nu)\frac{|D|}{nz_n}$ 的 $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ 的个数是

$$\left[\binom{n-1}{\nu} + \binom{n-1}{\nu-1}\right] 2^{-n+1} z_{n-1}\frac{l_n}{2} = \binom{n}{\nu} 2^{-n} z_n.$$

(ii) 特别取积分是正的 $\Delta_n^{(\lambda_n)}$, 积分的值的和是 $\mu_n \cdot |D|$,

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{1}{n2^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2\nu)\binom{n}{\nu} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left\{\binom{n-1}{\nu} - \binom{n-1}{\nu-1}\right\} = \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{\left[\frac{n}{2}\right]},\end{aligned}$$

$$\mu_{2p} = \mu_{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p},$$

μ_n 与 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 无关. 进一步估计之, 得

$$\mu_{2p} = \mu_{2p+1} = \frac{1}{2\sqrt{2p+1}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{(2p-1)(2p+1)}{2p\cdot 2p}\right)},$$

最后的根号内的因子均小于 1, 所以

$$\mu_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(iii) $F\cap\{y : \int_E \varphi(x,y)dx > 0\}$ 可以含于由 $[c_\nu, d_\nu]$ 组成的区间并 F_0 里. 显然,

$$\iint\limits_{E\times F}\varphi(x,y)dxdy \leqslant \int_{F_0}dy\int_E\varphi(x,y)dx = \int_E dx\int_{F_0}\varphi(x,y)dy.$$

同理, $E\cap\{x : \int_{F_0}\varphi(x,y)dy > 0\}$ 可以含于由 $[a_n^{(\lambda_n)}, b_n^{(\lambda_n)}]$ 组成的区间并 E_0 里. 所以

$$\iint\limits_{E\times F}\varphi(x,y)dxdy \leqslant \int_{E_0}dx\int_{F_0}\varphi(x,y)dy = \iint\limits_{E_0\times F_0}\varphi(x,y)dxdy.$$

由 (ii),

$$\iint\limits_{E\times F}\varphi(x,y)dxdy \leqslant \mu_n\cdot|D|.$$

同理,

$$\iint\limits_{E\times F}\varphi(x,y)dxdy \geqslant -\mu_n\cdot|D|.$$

即

$$\left|\iint\limits_{E\times F}\varphi(x,y)dxdy\right| \leqslant \mu_n\cdot|D| < \frac{|D|}{2\sqrt{n}}.$$

(iv) 有必要时, 将 E 分成

$$E_1 = \left\{x : \int_F\varphi(x,y)dy > 0\right\} \quad 及 \quad E_2 = \left\{x : \int_F\varphi(x,y)dy < 0\right\},$$

则立刻推出

$$\int_E dx\left|\int_F\varphi(x,y)dy\right| < \frac{|D|}{\sqrt{n}}, \quad \int_F dy\left|\int_E\varphi(x,y)dx\right| < \frac{|D|}{\sqrt{n}}.$$

这就是所要证明的.

取正方形 $I = [0,1]\times[0,1]$, 分出小正方形 (见图 32)

$$P_k = \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]\times\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right] \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

以每个 P_k 为上述的 D, 作同样的函数 $\varphi_k(x,y)$. 不过这回取

$$n = n_k = 2^{2k}, \quad l_1 = l_2 = \cdots = l_{n_k} = 2.$$

在 $I = [0,1]\times[0,1]$ 上定义函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2k}\varphi_k(x,y), & (x,y)\in P_k, \\ 0, & \text{在其他情形}. \end{cases}$$

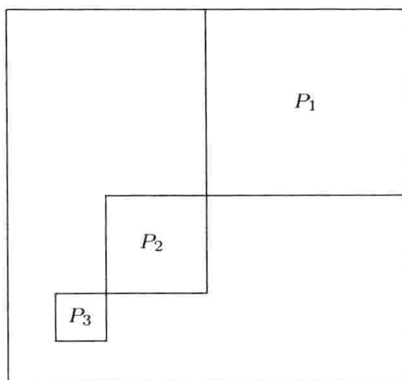


图 32

f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上并不 (L) 可积, 因为

$$\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|dxdy\geqslant\sum_{k=1}^{N}\iint\limits_{P_k}|f(x,y)|dxdy=N.$$

f 满足要求的性质.

事实上, 设 E,F 是 $[0,1]$ 的可测集. 令

$$E_k=E\cap\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right),\quad F_k=F\cap\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

由 Fubini 定理, 下列积分存在:

$$\int_{E_k}dx\int_F f(x,y)dy=2^{2k}\iint\limits_{E_k\times F_k}\varphi_k(x,y)dxdy.\tag{4}$$

再由 (1),

$$\int_{E_k}dx\left|\int_F f(x,y)dy\right|=2^{2k}\int_{E_k}dx\left|\int_{F_k}\varphi_k(x,y)dy\right|<2^{2k}\frac{|P_k|}{\sqrt{n_k}}=\frac{1}{2^k}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}dx\left|\int_F f(x,y)dy\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}.$$

因之, 积分

$$\int_E dx\left|\int_F f(x,y)dy\right|,\quad \int_E dx\int_F f(x,y)dy$$

也存在. 由 (4),

$$\int_E dx\int_F f(x,y)dy=\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}\iint\limits_{E_k\times F_k}\varphi_k(x,y)dxdy.$$

同理,

$$\int_F dy\int_E f(x,y)dx=\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}\iint\limits_{E_k\times F_k}\varphi_k(x,y)dxdy.$$

注 根据 Fubini 定理, 当 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上 (L) 可积时, 它的两个累次积分存在且等于 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的积分值. 例 15 说明了它的逆命题并不成立. 例 16 更进一步指出, 即使对任意可测集 $E\subset[a,b], F\subset[c,d]$, 恒有

$$\int_E dx\int_F f(x,y)dy=\int_F dy\int_E f(x,y)dx,$$

也不能保证 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的 (L) 可积性.

17. 一个间断函数 f, 使 $\int_0^1 f(x,y)dx$ 是连续函数.

设 $f(x,y)=\mathrm{sgn}(x-y)$, 并令

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx.$$

由于积分区间为 $0\leqslant x\leqslant 1$, 故当 $y<0$ 时,

$$f(x,y)=1;$$

当 $0<y<1$ 时,

$$f(x,y)=\begin{cases}-1, & x<y,\\ 0, & x=y,\\ 1, & x>y;\end{cases}$$

当 $y=1$ 时,

$$f(x,y)=\begin{cases}-1, & x<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$$

当 $y>1$ 时,

$$f(x,y)=-1.$$

因此, 当 $y\leqslant 0$ 时,

$$F(y)=\int_0^1 1dx=1;$$

当 $0<y<1$ 时,

$$F(y)=\int_0^y f(x,y)dx+\int_y^1 f(x,y)dx=\int_0^y(-1)dx+\int_y^1 1dx=1-2y;$$

当 $y\geqslant 1$ 时,

$$F(y)=\int_0^1(-1)dx=-1.$$

合并以上结果得

$$F(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant 0,\\ 1-2y, & 0<y<1,\\ -1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

易见, $F(y)$ 是连续函数.

18. 函数 f, 使 $\int_0^1 f(x,y)dx$ 是间断函数.

设 $f(x,y)=y/(x^2+y^2)$, 并令

$$F(y)=\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

因为

$$F(y)=\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx=\arctan\frac{1}{y},$$

所以

$$F(0+)=\lim_{y\to 0+}F(y)=\pi/2>0.$$

又 $F(0)=0$, 可见 $F(y)$ 在 $y=0$ 处是间断的.

注 容易证明, 若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义并且是连续的, 则

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

是区间 $[c,d]$ 上的连续函数. 例 18 说明了在这个命题中, 函数 f 在 D 上连续的条件是不能去掉的. 例 17 则说明了这个条件也不是必要的.

19. 一个连续函数 f, 使 $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx$ 是间断函数.

在 $D=[0,+\infty)\times[-2,2]$ 上定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(1-y^2)x/x, & x\neq 0,\\ 1-y^2, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 是 D 上的连续函数. 考虑积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-y^2)x}{x}dx.$$

当 $|y|=1$ 时, $F(y)=0$. 当 $|y|<1$ 时, 作变换 $t=(1-y^2)x$, 则

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

当 $|y|>1$ 时, 作变换 $t=-(1-y^2)x$, 则

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)dt=-\frac{\pi}{2}.$$

因此, $F(y)$ 在 $y=\pm1$ 处不连续.

注 设 f 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续且积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

关于 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 是 y 在区间 $[c,d]$ 上的连续函数 (参看 [7], pp.701—702). 上述反例说明了在这个命题中, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛的条件是不能去掉的.

20. 一个一致收敛的参变量积分, 不能以与参数无关的收敛积分为优函数.

所谓存在着与参数无关的收敛积分作为被积函数 $f(x,y)$ 的优函数, 是指存在

着函数 $\varphi(x)$, 使对一切 y, 不等式

$$|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$$

恒成立且积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 收敛.

今考虑积分

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} dx \quad (0 < y < 1).$$

我们先来证明, 积分 I 是一致收敛的. 为此, 作变换 $1/y = t$, 则

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx \quad (1 < t < +\infty).$$

我们只要证明, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在着与 t $(1 < t < +\infty)$ 无关的正数 M, 可使

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx < \varepsilon.$$

为了这一目的, 我们再作变换 $u = t(x-t)$, 则

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx = \frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

现分三种情形来讨论.

(i) 设 $1 < t < M/2$, 则因 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ 收敛, 故存在正数 M_1, 当 $M > M_1$ 时, 有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du < \int_{\frac{M}{2}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

(ii) 设 $M/2 \leqslant t \leqslant M$, 则存在正数 M_2, 当 $M > M_2$ 时, 就有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{2}{M}\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

(iii) 设 $t > M$, 则当 $M > M_2$ 时, 就有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{M} < \varepsilon.$$

因此, 当 $M > \max\{M_1, M_2\}$ 时, 可使

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx < \varepsilon.$$

即所论积分对 y 是一致收敛的.

另一方面, 不存在 $e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}$ 的优函数 $\varphi(x)$. 事实上, 若取 $y = 1/x$, 亦即 $x - 1/y = 0$, 于是由

$$\left|e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\right| \leqslant \varphi(x)$$

得到 $\varphi(x) \geqslant 1$, 因而积分 $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$ 发散. 由是不能用优函数的方法来证明积分 I 的一致收敛性.

参考文献

[1] 刘文, 一类连续函数. 科学通报, 22 (1977), 392–395.

[2] ——, 一类局部循环函数. 科学通报, 24 (1979), 1–4.

[3] ——, 一类奇异单调函数与二进小数的一个度量性质. 科学通报, 24 (1979), 1009–1013.

[4] ——, 一类奇异单调函数. 科学通报, 27 (1982), 1087.

[5] 江泽坚, 数学分析, 北京: 人民教育出版社, 1965.

[6] 江泽坚、吴智泉, 实变函数论. 北京: 人民教育出版社, 1961.

[7] 陈传璋、金福临等, 数学分析, 上海: 上海科学技术出版社, 1962, 第 2 版.

[8] 陈建功, 实函数论. 北京: 科学出版社, 1958.

[9] 陈建功, 三角级数论, 上海: 上海科学技术出版社, 1964.

[10] 李继闵, 周期函数之和、差、积、商的周期性. 数学通报, 1965 第 5 期, 40–41.

[11] 杨宗磐, 数学分析入门. 北京: 科学出版社, 1958.

[12] 宣立新, 对两个周期函数之和的周期性的一点看法. 南京师大学报, 1984第 2 期, 37–42.

[13] 郑格于, 再谈周期函数的最小正周期. 数学通报, 1963 年第 12 期, 35–36.

[14] 郑维行、王声望, 实变函数与泛函分析概要. 北京: 人民教育出版社, 1980.

[15] 柳孟辉, 一个简单的不可微分的连续函数. 数学学报, 4 (1954), 479–481.

[16] 赵明方, 再论皮亚诺曲线. 数学通报, 1965 年第 3 期, 35–36.

[17] 梁宗臣, 多元函数的最大值与最小值. 数学通报, 1965 年第 10 期, 41–45.

[18] 夏道行等, 实变函数论与泛函分析概要. 上海: 上海科学技术出版社, 1963.

[19] 熊庆来, 高等算学分析. 上海: 商务印书馆, 1933.

[20] 颜怀曾, 周期函数的最小正周期, 数学通报, 1963 年第 6 期, 44–45.

[21] Алексаидров, П. С., Введение в общую Теорию мнотеств и функций. 1948 (有中译本, 杨永芳译, 上海: 商务印书馆).

[22] Колмогоров, А. Н., Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue. Bulletin International de l'Académie Polonaise, 1923, 83–86.

[23] ——, Une Série de Fourier-Lebesgue divergente partout. Compt. Rend. Acad. Sci

(Paris), 183 (1926), 1327–1328.

[24] ——, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout. Fund. Math. 4 (1923), 324–328.

[25] Лузин, Н. Н., Теорня функцнй лействительного переменного. 1948 (有中译本, 何旭初等译, 北京: 高等教育出版社).

[26] ——, Über eine Potenzreihe. Rend. Circ. Matem. Palermo 32 (1911), 386–390.

[27] Натансон, И. П., Теорня функций вещественной переменной. М. Л., Гостехнздат, 1950 (有中译本, 徐瑞云译, 上海: 商务印书馆).

[28] Никольский, С. М., Курс математицеского анализа. 1974 (有中译本, 刘远图、郭思旭、高尚华译, 北京: 人民教育出版社).

[29] Оцан, Ю. С., Сборниксадац и теорем по теории функций действительного переменного (有中译本, 李荣涑、张业才、张华安译, 北京: 人民教育出版社).

[30] Стецкин, С. В., О сходимости и расходимости тригонометрицескихрядов. УМН VI, № 2 (1951), 148–149.

[31] Ульянов, П. Л., О продолжении функций ДАН 105, № 5 (1955), 913–915.

[32] ——, О расходимости рядов фурье. УМН, XII, № 3 (1957), 75–132.

[33] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегральногоисцисления III. 1949 (有中译本, 路见可译, 北京: 高等教育出版社).

[34] ——, Sur une fonction de deux variables sans intégrale double. Fund. Math. 6 (1924), 30–36.

[35] Abian, A., An example of a nonmeasurable Set. Boll. U. M. I. 1 (1968), 366–368.

[36] ——, A simplest example of a nonmeasurable set. Simon stevin 50 (1976/77), 101–102.

[37] Anderson, D. R., Kay, D. C., Commuting maps lacking commuting extensions. Amer Math Monthly. Vol 74 (1967), 183–184.

[38] Ballard, W. R., Livingston, A. E., Myers, W. H., A variant of Taylor's theorem. Amer Math Monthly. Vol 70 (1963), 865–868.

[39] Benedetto, J. J., Real variable and integration with historical notes. 1976.

[40] Bendixon, I., Quelques théorémes de la théorie des ensembles de points. Acta Math 2 (1883), 416–418.

[41] Bernstein, S., Sur la convergence absolue des séries trigonometriques. Compt. Rend. Acad. Sci (Paris). 158 (1914), 1661–1664.

[42] ——, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. Communications de la Soc. Math de knarkow, 2me Série, 14 (1914), 139–144.

[43] Besicovitch, A. S., Two problems on power series. J. London Math Soc 38 (1963), 223–225.

[44] ——, Two problems on convergence. Proc Cambridge philos. Soc 59 (1963), 253–255.

[45] Bhakta, P. C., On the differenti-ability of a certain function. Indian J. Mech Math

3 (1965), 82–83.

[46] Boas, R. P., A primer of real functions. Carus monographs, 1960.

[47] Bôcher, M. Annals of Math (2), Vol 4 (1904), 159.

[48] Bruckner, A., On derivatives with a dense set of zeros. Revue Rovmaine de Math pures et Appl. 10 (1965), 149–153.

[49] Brwein, D., Generalization of the Riemann-Lebesgue lemma. Amer Math Monthly. Vol 80 (1973), 698–699.

[50] Buch, K. A., Locally recurrent functions. Amer Math Monthly. Vol 69 (1962), 199–206.

[51] Burr, J., Discontinuous function with partial derivatives everywhere. Amer Math Monthly. Vol 67 (1960), 813–814.

[52] Bush, K. A., Continuous functions without derivatives. Amer Math Monthly. Vol 53 (1952), 222–225.

[53] Carathéodory, C., Vorlesungen Über reelle Funktionen. Leipzi-Berlin, 1927 (有中译本, 武崇林译, 北京: 科学出版社).

[54] Carleman, T., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion. Acta Math. 41 (1918), 377–384.

[55] Carleson, L., On convergence and growth of partialsums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135–157.

[56] Cesari, L., Variation multiplicity, and semicontinuity. Amer Math Monthly. Vol 65 (1958), 317–332.

[57] Chen Y. M. (陈永明), J. London Math. Soc. 44 (1969), 643–654.

[58] Croft, H. T., On the sum of differentiable functions. Proc Cambridge philos. Soc 58 (1962), 225–228.

[59] ——, A note on a Darboux continuous function. J. London Math. Soc 38 (1963), 9–10.

[60] Darst, R. B., On some problems of S, Marcus. Rev Roum. Math, pures et Appl. 12 (1967), 1043–1044.

[61] ——, On the 1-1 sum of two Borel set. Proc Amer Math Soc 25 (1970), 914.

[62] David, P., A note on symmetrically continuous functions. Časopis Pěst Mat. 96 (1971), 262–264.

[63] Davies, R. C., Weinmann, A., Problem 5502. Amer Math Monthly. Vol 74 (1967), 727.

[64] De Marr., Research problems extension of commuting mappings. Bull Amer Math. Soc, 70 (1964), 500–501.

[65] Demos, M. S., Continuous functions with zero. Amer Math Monthly. Vol 77 (1970) 198.

[66] Denjoy, A., Exemples de fonctions derivées. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Paris 138 (1914), 1003.

[67] Denniston, R. H. F., Periodic functions having incommensurable periodic. Amer Math Monthly. Vol 64 (1957), 598–599.

[68] Dressler, R. E., Kirk, R. B., Non-measurable sets of reals whose measurable subsets are countable. Israel J. Math. 11 (1972), 265–270.

[69] Erdös, P., An example concerning open everywhere discontinuous functions. Rev. Roum. Math pures et Appl. 11 (1966), 621–622.

[70] Faber, G., Über stetige Funktionen. Math Annglen. Vol 69 (1910), 372–443.

[71] Fatou, P., Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. 30 (1906), 335–400.

[72] Féjer, L., Sur les singularitiés de la séries de Fourier des fonctions continues. Ann Sci. Ec. Normale Sup. 28 (1911), 63–103.

[73] Fine, N. J., Amer Math Monthly. Vol 53 (1946), 283–284.

[74] ——, A Sequence of function with no convergent subsequence. Amer Math Monthly Vol 70 (1963), 762–763.

[75] Freimer, M., Note on a convergence problem. Amer Math Monthly. Vol 62 (1955), 645.

[76] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H., Counterexamples in analysis. Holden-Day, Inc., 1964 (有中译本, 高枚译, 上海: 上海科学技术出版社).

[77] Gerald, F., Increasing continuous singular functions. Amer Math Monthly. 80 (1973), 918–919.

[78] Goffman, C., A bounded derivative which is not Riemann integrable. Amer Math Monthly Vol 84 (1977), 205–206.

[79] Grossman, J. W., The distribution of Lebesgue-measurable Sets. Amer Math Monthly. Vol 74 (1974), 209–210.

[80] Haclane, G. R., Divergent integral and convergent series. Amer Math Monthly. Vol 65 (1958), 50.

[81] Haines, S., Leetch, L. F., A limit which is not the derivative. Amer Math Monthly. Vol 74 (1967), 721.

[82] Halmos. P. R., Measure theory. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, N. J. 1950 (有中译本, 王建华译, 北京: 科学出版社).

[83] Halperin, I., Discontinuous functions with the Darboux property. Amer Math Monthly. Vol 57 (1950), 539–540.

[84] Hardy, G. H., A theorem concerning Taylor's Series. Quarterly Journal of Mathematics. 44 (1913), 147–160.

[85] ——, Weierstrass's non-differentiable function. Trans. Amer Math Soc. 17 (1916), 301–325.

[86] ——, On certain criteria for the convergence of the Fourier Series of a continuous function. Messenger of Mathematics. 47 (1918), 149–156.

[87] ——, Pure mathematics. London. 1963.

[88] ——, Rogosinski, W., Fourier Series Cambridge, 1944 (有中译本, 徐瑞云、王斯雷译, 上海: 上海科学技术出版社).

[89] Hausdorff, F., Mengenlehre. Berlin-Leipzig. 1927 (有中译本, 张义良、颜家驹译, 科学出版社).

[90] Henkel, D., A convergent integral with large integrand. Amer Math Monthly. Vol 75 (1968), 1025.

[91] Herzog, F., Piranian, G., Sets of convergence of Taylor series, I. Duke Math. Journ. 16 (1949), 529–534.

[92] Hewitt, E., Stromberg, K., Real and abstract analysis. Berlin-Heidelberg New York 1965.

[93] Hille, E., Tamarkin, J. D., Remarks on a known example of a monotone continuous function. Amer Math Monthly. Vol 36 (1929), 255–264.

[94] Hobson, E. W., The theory of functional of real variable Vol II. New York 1957.

[95] Hunt, R. A., Proc. Conf. Edwardr. ILL (1967), 235–255.

[96] Katznelson, Y., Stromberg, K., Every where differentiable, nowhere monotone functions. Amer Math Monthly Vol 81 (1974), 349–354.

[97] Kestelman, H., (A, i) fails in $c[0, 1]$. Amer Math Monthly. Vol 80 (1973), 1062–1063.

[98] Klambauer, G., Mathematical analysis. Marcel Dekker, Inc. New York, 1975 (有中译本, 庄亚栋译, 上海: 上海科学技术出版社).

[99] Knopp, K., J reine angew Math. Vol 142 (1913) 292–293.

[100] Kristensen, E., Functions which are discontinuous at every rational point. Nordisk Mat Ti dskr 10 (1968), 150–156, 174–175.

[101] Lebesgue, H., Intégrale, longueur, aire. Annali di Mat. 7 (1902), 231–258.

[102] ——, Leçons Sur l'intégration. Gauthier-Villars, Paris (1904).

[103] ——, Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant á une condition de Lipschitz. Bulletin de la société Math. de France. 38 (1910), 184–210.

[104] Leo Moser., A Set everwhere dense in the plane. Amer Math Monthly. Vol 67 (1960), 189.

[105] Lipiński, J. On zeros of a continuous nowhere differentiable function. Amer Math Monthly. Vol 73 (1966), 166–168.

[106] Liu. Wen ., A space filling curve. Amer Math Monthly. Vol 90 (1983), 283.

[107] Marchis, F., On a continuous non-diffentiable function. An Univ Timisoara Ser Sti Mat-Fiz (1963), 181–190.

[108] Marcinkiewicz. J., Sur les Séries de Fourier. Fund Math. 27 (1936), 38–69.

[109] Marcus, S., An elementary example of a continous function without a left or right derivative at any point. Gaz Mat. Fiz. Ser A. 14 (1962), 79–80.

[110] ——, Sur les dérivées dont les zéros forment un ensemble frontiére partout dense. Rend Cire. Mat Palermo. 2 (1963), 1–36.

[111] ——, Some remarks on real functions II. Rev Roum. Math Pures et Appl. 11 (1966), 911–916.

[112] Mauldon, J. G., The differentiability of locally recurrent functions. Amer Math Monthly. Vol 72 (1995), 983–985.

[113] Mazurkiewicz, S., Sur les suites de fonctions continuous. Fund Math. 18 (1932), 114–117.

[114] Mckinsey, J. C. C., An interesting even fauction. Amer Math Monthly. Vol 56 (1949), 693.

[115] Miloslav, J., Sur la dérivabilité des founctions composées. Časopis Pěst Mat. 99 (1974), 352–362.

[116] Minassian, D. P., Gaisser, John W., A simple Weierstrass function. Amer Math Monthly. Vol 91 (1984), 254–256.

[117] Moran, D. A., For a collection of examples and counterexamples. Amer Math Monthly. Vol 68 (1961), 508–509.

[118] Olmsted, J. M. H., Real variables. Appleton-Century-Crofts. Inc. New York (1956).

[119] ——, Advanced Calculus. Appleton-Century-Crofts. Inc. New York (1961).

[120] Osgood. W. F., Non-uniform convergence and the integration of series term by term. Amer J. Math 19 (1897), 155–190.

[121] ——, A Jordan curve of positive area. Trans. Amer Math Soc. 4 (1903), 107–112.

[122] Owens, P. J., Absolutely convergent Cauchy products. Amer Math Monthly. Vol 75 (1968), 687.

[123] Pastor, J. R., Elementos de la teoria de functiones. 3d ed. Ibero-Americana, Madrid-Buenos Aires (1953).

[124] Piranian, C., The derivative of a monotonic discontinuous function. Proc Amer Math Soc 16 (1965), 243–244.

[125] Pólya, G., Amer Math Monthly. Vol 51 (1944), 593.

[126] ——, Szegö, G., Problems and theorems in analysis. Vol 1. Springer-Verlag, 1972 (有中译本, 张奠宙、宋国栋等译, 上海: 上海科学技术出版社).

[127] Ponomarev, S. P., Symmetrically continuous functions. Mat Zametki, 1 (1967), 385–390.

[128] Posey, E. E., Vaughan, J. E., Functions with a proper local maximum in each interval. Amer Math Monthly. Vol 90 (1983), 281–282.

[129] Pringsheim, A., Zue Theorie der Taylorschen Reihe. Math Ann 42 (1893), 153–184.

[130] ——, Sitzungsberichte d. Münch. Akad. Vol 28 (1898), 71.

[131] ——, Sitzungsberichte d. Münch. Akad. Vol 29 (1899), 48.

[132] Rehm, A., Kennedy, P. B., Level points of a continuous function. Amer Math Monthly. Vol 72 (1965), 1137–1138.

[133] Rennie, B. C., The Riemann integrability of $f^{12}+g^{12}, f', g'$. Math Proc Cambridge philos Soc 82 (1977), 275–276.

[134] Richard R. Goldberg., Methods of real analysis (有中译本, 侯德润译, 北京: 人民教育出版社).

[135] Riemann, B., Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Ges. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, 227–271.

[136] Riesz, F., Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funk tion von beschränkter Schwankung. Math. Z. 2 (1918), 312–315.

[137] Robert, B. Ash., Real analysis and probability. 1972.

[138] Rogers, C. A., A linear Borel set whose difference set is not a Borel set. Bull. Lond Math Soc. 2 (1970), 41–42.

[139] Rubel, L. A., A pathological Lebesgue-measurable function. J. London Math Soc. Vol 38 (1963), 1–4.

[140] Rubert, S., Continuous function with rational values almost everywhere. Amer Math Monthly. Vol 66 (1959), 428.

[141] Rudin, W., Principles of mathematical analysis. 2d. ed. McGraw-Hill Book Company, New York. 1964 (有中译本, 赵慈庚、蒋铎译, 北京: 人民教育出版社).

[142] ——, Real and complex analysis. New York, 1966.

[143] Ruziewicz, S., Sur les fonctions, qui ont même dérivée et dont la différence n'est pas constanle. Fund Math. 1 (1920) 148–151.

[144] Scheefer., Math Annalen. Vol 35 (1890), 542.

[145] Schrader, K., A pointwise convergence theorem for sequences of continuous functions. Trans. Amer Math Soc. 159(1971), 155–163.

[146] Schubert, S. Roy., On a function of van der Waerden. Amer Math Monthly. Vol 70 (1963), 402.

[147] Schwarz, A., Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Vol 2. Berlin, Julius Springer, 1890, 309.

[148] Shields, A., A convergence problem. Bull. Amer Math Soc. Vol 60 (1954), 589.

[149] Sierpiński, W., Bull. Internat. Ac. Sciences Cracove (1911), 149.

[150] ——, Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel. Fund Math 1 (1920), 105–111.

[151] ——, Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement. Fund Math. 1 (1920), 112–115.

[152] ——, Sur les rapports entre 1' existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_0^1 f(x,y)dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$. Fund Math. 1 (1920), 142–147.

[153] ——, Remarque sur les suites infinies de fonctions. Fund Math. 18 (1932). 110–113.

[154] ——, Hypothèse du continu. Warszawa, 1934.

[155] Smital, J., On a problem concerning uniform limits of Darboux functions. Collog Math. 23 (1971), 115–116.

[156] ——, On the sum of continuous and Darboux functions. Proc. Amer Math Soc. 60 (1976), 183–184.

[157] Snow, W., Discontinuity in a function with all partial derivatives. Amer Math Monthly. Vol 80 (1973), 565.

[158] Spivak, M., Calculus on manifolds. 1968 (有中译本, 齐民友、路见可译, 北京: 科学出版社).

[159] Steinhaus, H., Une série trigonométrique partout divergente. Compt Rend. Soc Sci (Varsovie), 1912, 219–229.

[160] ——, A divergent trigonometrical series. Journ. Lond Math Soc, 4 (1929), 86–88.

[161] Sunouchi, G., A Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere. Ködai Math. Seminar reports 1 (1953), 27–28.

[162] Szász, O., Über den Kongvergenzexponent der Fourierschen Reihen. Münchener Sitzungsberichte. 1922, 135–150.

[163] ——, Über die arithmetische Mittel Fourierscher Reihen. Acta Math, 48 (1926), 355–362.

[164] Szidon, S., Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. Math. Zeit. 10 (1921) 121–127.

[165] Takeuchi, Yu., Construction of examples of certain rectifiable curves. Bol Mat. 8 (1974), 122–153.

[166] Tiber, Šalàt., On functions that are monotone on no interval. Amer Math Monthly. Vol 88 (1981), 754–755.

[167] Titchmarsh, E. C., The theory of functions. Oxford. 1939 (有中译本, 吴锦译, 北京: 科学出版社).

[168] ——, The order of magnitude of the coefficients in a generalized Fourier series. Proc. Lond Math Soc, 22 (1925), 25–26.

[169] Volterra, V., Giornale de Battaglini. 1981.

[170] Wade, W. R., The bounded convergence theorem. Amer Math Monthly. Vol 81 (1974), 387–389.

[171] Walter, W., A counterexample in connection with Egorov's theorem. Amer Math Monthly. Vol 84 (1977), 118–119.

[172] Weger, R. C., Measurable sets which contain no rectangles. Amer Math Monthly. Vol 79 (1972). 699.

[173] Wilansky, A., Two examples in real variables. Amer Math Monthly. Vol 60 (1953), 317.

[174] Young, W. H., Proc Lond Math Soc. 2 (1903), 94.

[175] ——, On the Fourier series of bounded functions. Proc Lond Math soc, 12 (1913), 41–70.

[176] ——, Young, G. C., Quarterly Journal of Math. Vol 61 (1910), 87.

[177] Zahorski, Z., Sur la premiére dérivée. Trans. Amer Math Soc 69 (1950), 1–54.

[178] Zeller, K., Über Konvergenzmengen von Fourierreihen. Archiv der Math. 6 (1955), 335–340.

[179] Zygmund, A., Sur la convergence absolue des séries de Fourier. Proc Lond Math Soc, 27 (1928), 194–196.

[180] ——, Trigonometric Series. London. 1939.

名词索引

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

W

X

[General Information]
书名=实分析中的反例
作者=汪林
页数=375
SS号=13482932
DX号=
出版日期=2014.01
出版社=高等教育出版社

27.一个渐缩的无界闭集序列，其交是空集

28.一个紧集，它的导集是可数集

29.两个完备集，其交不是完备集

30.可数个完备集，其并不是完备集

31.完备的疏集

32.无理数的完备疏集

33.一个疏集序列，其并是稠密集

34.两个不相交的疏集，其中任一集的每个点都是另一集的聚点

35.一个第二纲的集，它的余集不是第一纲的集

36.一个有界闭集被诸闭区间覆盖而不能从中取出有限子覆盖

37. [0，1]中的两个不相交的稠密集A与B，满足[0， 1]=A∪B，且对任何α，β（0 ≤α＜β ≤ 1），交集（α，β） ∩ A与（α，β） ∩ B都具有连续统的势

38.任给势小于？的实数子集Q，有实数a，使对每一x∈ Q， x+a皆为无理数

第二章 函数

0.引言

1.一个发散序列｛an｝，使｛&seperatoran &seperator｝收敛

2.两个非负的发散序列，其积却收敛于零

3.两个非负的发散序列，其和却是一个收敛序列

4.算术平均值收敛的发散序列

5.不是有界变差的收敛序列

6.对每个正整数p，都有limn→∞（an+p-an）=0的发散序列｛an ｝

7.对任意严格递增的正整数序列｛φn｝=｛φ（n）｝，能使limn→∞（aφ（n）-an）=0的发散序列｛an ｝

8.函数f，对于它，存在函数g使gof =I，而不存在函数h，使foh=I

9.函数f，对于它，存在无穷多个g适合fog=go f

10.在某点对称连续而不连续的函数

11.函数f，使f在x0的任何邻域内都是无界的，但当x→x0时f（x）并不趋于无穷大

12.没有最小正周期的非常值周期函数

13.一个处处不连续的非常值周期函数，它具有最小正周期

14.存在一个没有最小正周期的周期函数，它的值域是可数集

15.存在一个没有最小正周期的周期函数，它的值域是不可数集

16.存在两个具有不同周期的周期函数，其和仍是一个周期函数

17.存在两个具有最小正周期的函数，它们之间无可公度的周期，但其和（积）仍为周期函数

18.存在一个非周期函数f，使&seperatorf&seperator是周期函数

19.处处有限而又处处局部无界的函数

20.一个无处连续函数，其绝对值却处处连续

21.有唯一个连续点的函数

22.关于乘积函数连续性的例子

23.关于复合函数连续性的例子

24.两个正则函数，构成非正则的复合函数

25. [0，1]的一个闭子集X0及X0到X0上的两个可换连续映射f， g，不存在f，g的可换连续扩张

26.函数y=f （u）， u=g（x）适合limu→Af （u）=B， limx→ag（x）=A，但limx→af [g（x）]不存在

27.函数y=f （u）和u=g（x），其复合函数f [g（x）]处处连续，并适合limu→b f （u）=c， limx→a g（x）=b， limx→af [g（x）] ≠ c

28.函数fn （x） （n=1， 2，…）在x0均连续，而f （x）=suPn fn （x）在x0间断

29.一个无处连续函数，其反函数却处处连续

30.有限区间上的一个一对一的连续函数，其反函数不连续

31.不能作为任何连续函数序列的极限的函数

32. [0，1]上的一个函数f，它的连续点所成之集在[0，1]中稠密，但f不是某个连续函数序列的极限

33.[0，1]上的一个具有不可数间断点的函数，它却是某个连续函数序列的极限

34.函数序列｛f（n）kn）｝，对于任意固定的n，当k→∞时｛f（n）k （x）｝处处收敛于f（n） （x），而当n→∞时｛f（n） （x）｝处处收敛于f（x），但｛f（n）k（x）｝的任何子列并不处处收敛于f（x）

35.仅在有理点间断的严格递增的函数

36.在Cantor集上连续而在它的邻接区间上无处连续的函数

37.在Cantor集上无处连续而在它的邻接区间上连续的函数

38.在任意给定的Fσ型集上间断的函数

39.[0，1]上的一个函数f，它的连续点所成之集A与间断点所成之集B在[0， 1]内都稠密，且对任何开区间（α，β）？[0，1]，交集A∩（α，β）与B∩（α，β）都具有连续统的势

40.不能在全轴上作连续扩张的有界集上的有界连续函数

41.以一个任意的非紧集为定义域的连续的无界函数

42.（0， +∞）上的一个实值函数f，它在无穷多个点上连续，且对每一x∈ （0，+∞），f （x）=0当且仅当f （2x）≠0

43.[0， +∞）上的一个连续且有界的函数，它在[0， +∞）上不一致

连续

44.两个一致连续的函数，其积不一致连续

45.一个一致连续的函数，其反函数不一致连续

46.两个间断函数，其最小值函数却是一致连续的

47.在开区间I1与I2上均一致连续，但在I1 ∪ I2上不一致连续的函数

48.两个单调函数f，g，其中f连续而g间断，但复合函数fog却是连续的单调函数

49.两个区间之间一个无处单调的一一对应

50.两个严格递增的函数，其积不是单调函数

51.无处单调的连续函数

52.以一个任意的非紧集为定义域的连续的有界函数，它没有极值

53.定义域为紧集的没有局部极值的有界函数

54.有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数

55.处处取得局部极小值的非常值函数

56.在每个区间上有一个真正局部极大的函数

57.具有介值性质的间断函数

58.两个具有介值性质的函数，其和却没有介值性质

59.定义在[0, 1]内而取值于[0, 1]中的一个无处连续函数，它在每个任意小的非空子区间上都取尽[0, 1]中的一切值

60.一个无处连续的开函数，它在任何区间上都不具有介值性质

61.一个无处连续函数f，而具有性质f （x+y） = f（x） + f（y）

62.若干个半连续函数，它们的和是一个无处半连续的函数

63.两个半连续函数，其最小值函数并不半连续

64.无处半连续的函数

65.无处连续而又处处半连续的函数

66.一个收敛的上半连续函数序列，其极限函数并不上半连续

67.一个不连续映射，使开集的像是开集

68.一个连续映射，使某个无界闭集的像不是闭集

69.一个疏集A，以及从A到单位闭区间[0, 1]上的一个连续映射

第三章 微分

0.引言

1.仅在一点连续并可微的函数

2.存在一个可微函数f，而其绝对值函数&seperatorf&seperator并不可微

3.一个无处可微函数f，使limn→∞n[f （x+1/n）-f （x）]存在

4.关于乘积函数可微性的例子

5.关于复合函数可微性的例子

6.处处有导数（不必有限）的不连续函数

7.两个在点x_0均可微，而使max｛f，g｝与min｛f，g｝在x_0都不可微的函数f和g

8．［a， b]上的函数f，它满足Rolle定理的三个条件中任两个条件，但不存在ξ∈（a，b），使f’（ξ）=0

9.函数f，它在[a， b]上有连续的导函数f’，但对[a， b]内某点ξ，不存在x_1， x_2，使得f（x_2）-f（x_1）/x_2-x_1=f’（ξ）， x_1＜ξ＜x_2

10.中值定理失效的可微复值函数

11．L’Hospital法则失效的复值函数的不等式

12.一个在某点有极值的无穷可微函数，它的各阶导数在该点的值全都是零

13.一个连续函数，它在原点的每个邻域内有无穷多个局部极值

14.函数f，使$\lim_{h\to 0}$［ f （x+h）+f （x-h）-2f （x）]/h^2存在而f”（x）不存在

15．[0，1]上的一个可微函数，其导数在无理点连续而在有理点间断

16．[0，1]上的一个可微函数，其导数在已给的非空完备疏集上无处连续

17.一个具有连续导数的严格递增函数，其导数在已给的完备疏集上恒为零

18.一个严格递增的连续函数，它不处处可微

19.一个单调函数，其导函数并不单调

20．R^1上的一个严格单调的有界可微函数f，使$\lim_{x\to\pm\infty}$f’（x）≠0

21.一个在某点有极值的可微函数，它在该点的左右两侧都不是单调的

22.一个可微函数f，使f’（x_0）＞ 0，但f在包含点x_0的任何开区间内都不是单调的

23.函数f，使f （x）与f（x）=$\lim_{h\to 0}$[f（x+h）-f （x-h）]/（2h）在x=x_0都连续而f’（x_0）并不存在

24.一个可微函数f，当x为有理数时，f （x）为有理数，而f’（x）为无理数

25．（0，1）上的一个可微函数f，使$\lim_{x\to 0+}$ f （x）=∞，但$\lim_{x\to 0+}$ f’（x）=∞并不成立

26．（0，1）上的一个可微函数f，使f在（0，1）上有界而f’在（0，1）上无界

27.在已知点a_1，a_2，…， a_n没有导数的连续函数

28.在无理点可微而在有理点不可微的连续函数

29.处处连续而无处可微的函数

30.处处连续而仅在一点可微的函数

31.任给Gδ型的可数集E，可构造非减函数f，其导数满足条件：f’（x）=∞（x ∈ E），f’（x）=0 （x∈E）

32.无处存在单侧导数（有限或无穷）的连续函数

33.［0，1]上的一个无穷可微函数f，使｛x：f （x）=0｝为不可数的疏集

34.函数f，使f ∈ Hα ［a， b]，而f∈ Hβ ［a， b]， 0＜α＜β

35.函数f，使f ∈H1（-∞， +∞），而对任何α（0＜α＜1）， f∈ Hα（-∞， +∞）

36.满足α阶Holder条件的无处可微的连续函数

37.不满足任何阶Holder条件的可微函数

38.处处可微而无处单调的函数

39.在每个非空区间上都能取得局部极大值和局部极小值的可微函数

40.满足Lipschitz条件而无处单调的函数

第四章 Riemann积分

0.引言

1.函数f，使&seperatorf&seperator（R）可积而f不（R）可积

2.没有原函数的（R）可积函数

3.在任何区间上都没有原函数的（R）可积函数

4.在闭区间上有原函数但不（R）可积的函数

5.以任意零测度的Fσ集作为间断点集的（R）可积函数

6.与（R）可积函数对等但本身并不（R）可积的函数

7.一个（R）可积函数，在某个可数集上任意改变它的值（但这些数值全体要组成有界集合），而不影响它的可积性

8.复合函数是否（R）可积的各种实例

9.两个函数f与g，使f2与g2皆（R）可积而（f +g）2并不（R）可积

10.一个有界函数序列的极限，它在任何非空区间上都不（R）可积

11.一个（R）可积函数序列，其上确界函数并不（R）可积

12.积分的极限不等于极限的积分的函数序列

13.一个（R）可积函数f，使g（x）=∫x0 f （t）dt处处可微，但在一个稠密集上，g’（x）≠ f（x）

14.一个（R）可积函数f，使g （x）=∫0x f （t） dt不处处可微

15.函数f和g，使得f在[a， b]上（R）可积，g在[a， b]上不变号且（R）可积，而在（a， b）中不存在满足等式∫baf（x）g（x）dx=f（ξ）∫bag（x）dx的ξ

16.函数f和g，使∫ca f （x） dg（x）和∫ba f（x）dg（x）均存在，而∫baf（x）dg（x）不存在（a＜c＜b）

17.函数f和g，使∫a f （x） dg（x）存在，但改变f在某个点的值，∫ba f（x）dg（x）就不存在

18. （0’ l）上的一个无界函数，其广义（R）积分∫ 10 f （x）dx不是对应的积分和式∑n-i i=0 f （ξi）△xi的极限

19. （0，1）内的一个单调函数f，使limn→∞∑n-1 k=1 1/n f（k/n）存在而f并不广义（R）可积

20.收敛而不绝对收敛的广义积分

21.函数f和g，使f广义（R）可积而g有界，但fg并不广义（R）可积

22. [0， +∞）上的一个函数，它在（0， +∞）的任何有限子区间上取正值、有界、可积，并且积分∫0+∞（f（x））αdx当α=1时收敛，而当α为不等于1的实数时发散

23.函数f，使&seperatorf&seperator广义（R）可积而x2并不广义（R）可积

24. [1， +∞）上的一个函数f，使f2广义（R）可积而&seperatorf&seperator并不广义（R）可积

25.在[1， +∞）上广义（R）可积的正值连续函数f，使limx→+∞f （x）≠ 0

26.广义积分∫+∞0 f （x）dx收敛而在每个区间[a，+∞）（a ＞ 0）上f （x）是无界、非负连续函数

27.一个有理函数R，使对任何在（-∞，+∞）上广义（R）可积函数f，都有∫+∞ -8f[R（x）]dx=∫+∞ -8 f（x）dx

28. Cauchy主值为有限的发散广义积分

第五章 无穷级数

0.引言

1.一个收敛级数∑∞n=1 an，使∑∞n=1a2n发散

2.一个发散的正项级数∑∞n=1 an，使∑∞n=1a2n收敛

3.一个发散级数∑∞n=1 an，使对每一k≥2，级数∑∞n=2 akn都收敛

4.一个收敛的正项级数∑∞n=1an，使∑∞n=1？an/？n发散

5.一个发散级数∑∞n=1an，使∑∞n=1（a2n-1+a2n）收敛

6.级数∑∞n=1an收敛且limn→∞bn/an=1，而级数∑∞n=1bn却发散

7.任给一个发散的正项级数∑∞n=1 an，可以找到一个收敛于零的正数序列{cn}，使∑∞n=1 cnan仍然发散

8.任给一个收敛的正项级数∑∞n=1 an，可以找到一个收敛于零的正数序列{cn}，使∑∞n=1 an/cn仍然收敛

9.给定使lim n→∞bn=0的正数序列{bn}，有一个正项发散级数∑∞n=1an，适合limn→∞an=0且limn→∞ an/bn=0

10.给定使limn bn=0的正数序列{bn}，有一个正项收敛级数∑∞n=1

an，适合limn→∞ an/bn=+∞

11.给定一个满足limn→∞cn=0的正数序列｛cn｝，有一个正项收敛级数∑∞n=1an和一个正项发散级数∑∞n=1bn，能使an/bn=cn

12.任给正数s，可以找到一个正项级数∑∞n=1 an，使对任何正数σ（0＜σ≤s），都可以用一个无穷子级数来表示：∑∞n=1 ank=σ

13.一个正项级数，使任何正有理数都是它的有限个不同项之和

14.通项趋于零而发散的交错级数

15.一个发散级数∑∞n=1 an，其部分和序列有界且limn→∞an=0

16.根检法失效的级数

17.比检法失效的级数

18. limn→∞n？an存在而limn→∞ an+1/an不存在的正项级数∑∞n=1an

19.两个收敛级数，其Cauchy乘积级数发散

20.两个条件收敛级数，其Cauchy乘积级数绝对收敛

21.两个发散级数，其Cauchy乘积级数绝对收敛

22.一个发散级数∑∞n=1 an，使当p=1， 2， 3，…时，limn→∞（an+1+ an+2 + …+an+p）=0

23.具有发散重排的收敛级数

24.存在一个发散级数，用重排不可能加快其发散程度

25.存在一个发散级数，用重排可以任意减慢其发散程度

26.一个实数序列｛an｝，使级数∑∞n=1aln 当l=5时发散，而当l不等于5的任何奇正数时收敛

27.一个收敛级数∑∞n=1an，使形如ak+ak+l+ak+2l+ak+3l+…的子级数（下标成等差级数，k，l为正整数）都收敛，而∑∞n=1an并不绝对收敛

28.一个收敛级数∑∞n=1 an，使形如ak+akl+akl2+…的子级数（下标成几何级数，k≤1， l≤2均为正整数）都收敛，而∑∞n=1an并不绝对收敛

29.任意地划分奇正整数集为两个没有公共元素的子集D和C，一个实数序列｛an｝，使当l∈C时级数∑∞n=1aln收敛，而当l∈D时∑∞n=1aln发散

30.对于任一条件收敛级数∑∞n=1an和任一实数x，存在序列｛εn｝，其中&seperatorεn&seperator=1.n=1，2，…，能使∑∞n=1 εnan = x

31.非绝对收敛级数，适当地引进括号后变成绝对收敛级数

32.收敛而不绝对收敛的无穷乘积

33.一个发散级数∑∞n=1 an，使无穷乘积∏∞n=1（1+an）收敛

34.级数∑∞n=2an和∑∞n=2a2n都发散，而无穷乘积∏∞n=1（1+an）却收敛

35.［1， +∞）上的正值连续函数f，使∫+∞1 f（x）dx收敛而∑∞n = 1 f（n）发散

36. [1, +∞）上的正值连续函数f，使∫+∞1 f（x）dx发散而∑n ∞ =1 f（n）收敛

37.给定[0, 1）上满足条件limx→1 f （x） = +∞的正值连续函数f ，可构造具有非负系数的幂级数P，适合P（x）＜f （x）且limx→1 P（x）=+∞

38. [0, 1）上的一个适合条件f（0）＞0且∫1 0 f （x）dx=+∞的递增连续函数f ，使对任何具有非负系数的幂级数P，若P（x） ≤ f （x），则∫ 1 0 P（x）dx ＜ +∞

39一个函数，它的Maclaurin级数处处收敛，但仅在一点与这个函数相合

40.一个函数，它的Maclaurin级数仅在一点收敛

第六章 一致收敛

0.引言

1.在各个Ek （k = 1, 2, …）上一致收敛，而在∪∞k1Ek上不一致收敛的函数序列

2.一个在紧集上一致有界的连续函数序列，而不存在逐点收敛的子列

3.一个一致有界且处处收敛的连续函数序列，它没有一致收敛的子列

4.一个有界函数序列，它处处收敛于一个无界函数

5.一个不一致有界的函数序列，它处处收敛于一个有界函数

6.一个连续函数序列的非一致极限，它在一个稠密集上无处连续

7.一个连续函数序列，它的非一致极限也是一个连续函数

8.一个递减的连续函数序列，它处处收敛于某个连续函数，但并不一致收敛

9.一个无处连续的函数序列，它一致收敛于一个处处连续的函数

10.收敛而无处一致收敛的连续函数序列

11.一个各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数，但无处一致收敛

12.一个正整数序列a1 ＜ a2＜…及紧集C，使对任意x ∈ C, sin anx → 0（n→∞），而｛sin anx｝在C上并不一致收敛

13.给定[0, +∞）上的实值函数f，适合f （0）=0, f （1）≠ 0, limn→∞f （n）=0，可构造正整数序列｛an｝及紧集C，使｛f（anx）｝在C上收敛而非一致收敛

14.两个一致收敛的函数序列，其乘积序列不一致收敛

15.一个连续函数序列｛fn｝，它在[0, 1]上一致收敛于f，然而，fn的弧长的极限不等于f的弧长

16.通项一致趋于零但不一致收敛的函数项级数

17.通用的连续函数序列

18.一个一致收敛的函数项级数，具有不一致收敛的重排

19.一个一致收敛的函数项级数，却无处绝对收敛

20.级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$绝对并一致收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}$ &seperator$u_n(x)$&seperator并不一致收敛

21.一个绝对并一致收敛的函数项级数，它无任何正项数值优级数

22.一个一致收敛的可微函数序列，其导函数序列的极限不等于极限函数的导数

23.一个一致收敛的无穷可微函数序列，其导函数序列无处收敛

24.一个非一致收敛的可微函数序列，其导函数序列的极限等于极限函数的导数

25.$[0, +\infty)$上的一个一致收敛于零的广义（R）可积函数序列$\{f_n\}$，而使数列$\{\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\}$发散

26.$[1, +\infty)$上的一个一致收敛的广义（R）可积函数序列，其极限函数并不广义（R）可积

第七章　点集的测度

0.引言

1.一个渐缩的可测集序列$\{E_n\}$，使$m(\lim_{n\to\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} mE_n$

2.一个含于有限区间中的可测集序列$\{E_n\}$，使$\lim_{n\to\infty} mE_n$存在，但$m(\lim_{n\to\infty} E_n) \neq m(\lim_{n\to\infty} E_n)$

3.一个可测集序列$\{E_n\}$，使$m(\lim_{n\to\infty} E_n) < \lim_{n\to\infty} mE_n$

4.测度为零的不可数集

5.任给实数a （$0<a<1$），在$[0, 1]$中可构造一个测度为a的完备疏集

6.直线上的一个稠密开集，它的余集的测度为无穷大

7.一个开集，它的测度不等于它的闭包的测度

8.一个可数的疏集，其闭包具有正测度

9.使得每个实数都是凝聚点的零测度集

10. $[0, 1]$中测度等于1的第一纲集

11.$[0, 1]$中测度等于零的第二纲集

12. $[0, 1]$内一个两两不相交的完备疏集序列，其并集的测度为1

13. $[0, 1]$中测度为零的不可数的稠密集

14.$[0, 1]$中的一个可测集E，使对任一非空开区间I ？ $[0, 1]$，恒有$m(I \cap E) > 0$， $m(I \cap E^c) > 0$

15.不可测集

16.一个两两不相交的集序列$\{A_n\}$，使$m^*(\cup_{n=1} A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$

17.一族可测集，其并集不可测

18.一族可测集，其交集不可测

19.一个有界的零测度集E，使E+E为一不可测集

20. R1的一个子集A，使A和Ac的每一可测子集其测度均为零

21.对每一有理数a，使 {x：f（x） = a} 均为不可测集的函数f

22. [0, 1]内的一个不可测集M，使m*M=0， m*M=1

23.导数几乎处处为零的单调的连续函数

24.函数f和g具有相同的导数，而f和g并不相差一个常数

25.导数几乎处处为零的严格单调的连续函数

26.闭区间上具有原函数的有界函数而不（R）可积

27.（R）可积函数f和连续函数g，构成不（R）可积的复合函数f o g

28.一个收敛的单调一致有界的连续函数序列，其极限函数不（R）可积

29. [0, 1]上的一个可微函数g，使g ”（0）存在，而对任何b＞0， g ’在[0, b]上并不（R）可积

30.一个同胚映射，它把一个测度为零的集映成测度大于零的集

31. [0, 1]上的一个严格递增的连续函数？和集A ？ [0, 1]，使mA= 0而m？（A）=1

32.对任一完备疏集E ？ [0, 1]，一个从[0, 1]到[0, 1]上的同胚映射f，使mf （E）=0

33.可测的非Borel集

34.一个同胚映射，它把一个可测集映成不可测集

35.一个Borel测度为零的集，其中含有非Borel可测集

36.两个Borel可测集B1, B2，使得B1-B2= {x-y：x ∈ B1，y ∈ B2} 不是Borel可测的

37.两个同胚的实数集，其中一个是第一纲集而另一个是第二纲集

38.两个同胚的实数集，其中一个是稠密集而另一个是疏集

39.定义于R1上的一个几乎处处为零的函数，它在每个非空开区间上的值域都是R1

40. R1上的一个函数，它的图形在平面内稠密

第八章 可测函数

0.引言

1.一个收敛的递增的简单函数序列，其极限函数不是简单函数

2.一个非零函数，它与任何函数之积恒为可测函数

3.一个不可测函数，其绝对值是可测函数

4.一族可测函数，其上确界函数并不可测

5. R1上的一个可测函数f，使supt∈R1 &seperatorf （x + t）-f（x-t）&seperator不可测

6.一个在任何（L）正测度集上均非（L）可测的函数，它在任何非空区

间上取每个实数作为函数值可达？次

7.函数f，使对任意实数a， E[x：f （x）=a]恒为可测集，而f在E上并不可测

8.可测函数f和连续函数g，构成不可测的复合函数f og

9.可测函数f和递增函数g，构成不可测的复合函数f o g

10．[a， b]上的一个一致有界的不可测函数序列｛fn｝，使对任一不可数集A ？[a， b]， ｛fn｝中不存在在A上收敛的子列

11.任给趋于零的数列｛αn｝，可构造一个有界可测函数f，使｛f （x-αn）｝并不几乎处处收敛于f （x）

12．EгopoB定理的结论不能加强为除掉一个测度为零的集外，｛ fn｝一致收敛于f

13．R1上的一个函数序列，使EгopoB定理不成立

14.一个不可测函数序列，使EгopoB定理不成立

15.一族函数｛ft （x）｝（t ≥ 2），对每一固定的t，它是x的可测函数，而对每一固定的x，它是t的可测函数，且limt→+∞ft（x） = 0，但｛ft （x）｝并不近一致收敛

16． [0，1]上的一个连续函数，它在[0， 1]上几乎处处取有理数值，而在任何非空子区间上均非常值函数

17.一个无处连续的可测函数，不论怎样改变此函数在任何测度为零的集上的值，它仍然是无处连续的

18.不能把Лузин定理中的连续函数改为多项式

19．[0， +∞）上的函数序列｛fn｝和｛gn｝，使｛gn｝和｛gn｝在[0，+∞）上分别依测度收敛于f和g，而｛fngn｝在[0， +∞）上并不依测度收敛于fg

20.一个依测度收敛的可测函数序列｛？n｝和连续函数F，而构成并不依测度收敛的复合函数序列｛Fo？n｝

21.一个无处连续的（L）可测函数，它不是（B）可测的

22.两个函数仅在一个（B）测度为零的集上彼此相异，其中一个（B）可测而另一个非（B）可测

23.不与第一类函数中的任何一个函数对等的可测函数

24.属于不同类的两个函数，而有相同的间断点

25.一个Fσ型集的特征函数，它不是第一类函数

26.一个（R）可积函数，它不是第一类的函数

27.不与（R）可积函数对等的有界可测函数

第九章 Lebesgue积分

0.引言

1． [0， 1]上的一个（L）可积函数f，使∑∞n=1 nmE[x：f （x）≥

n]=+∞

2. [0, +∞）上的一个非负连续的（L）可积函数f，使limx→+∞ f （x）=0不成立

3.可测集E上的非负有界可测函数序列｛fn｝，使limn→∞∫E fn（x）dx=0，而｛fn｝却无处收敛于零

4. [0，1]上的一个实值连续函数序列｛fn ｝，使f1 （x）≥f2 （x）≥…≥0，且若有连续函数f适合fn（x）≥f （x）≥0 （n=1，2，…），则f？0.但limn→∞∫0 fn （x） dx ≠ 0

5.一个在E上并不依测度收敛于零的函数序列｛fn｝，使对每一可测集e？E，都有limn→∞∫e fn （x）dx=0

6.任给趋于零的数列｛an｝，可构造一个非负可测函数序列｛fn｝，使∑∞n=1 an ∫Efn （x） dx收敛，而｛fn｝在E上无处收敛于零

7.一个（L）可积函数f和有限个区间的并集I（n），使limn→∞ ∫I（n） f （x） cos nxdx≠0

8. （L）可积而不（R）可积的有界函数

9.广义（R）可积而不（L）可积的函数

10. （L）可积而不广义（R）可积的非负函数

11.任给非几乎处处有界函数f，可构造一个（L）可积函数g，使fg不（L）可积

12. [0，1]上的一个有界可测函数f，使对任何（R）可积函数g，都有∫ [0，1] &seperatorf （x） -g（x） &seperatordx＞0

13.在每个子集上都（L）可积，但在并集上并不（L）可积的函数

14. R1上的一个非负（L）可测函数f，使对任何区间（a， b） （a＜b）及r∈R1，恒有m｛（a，b） ∩ ｛x：f （x）≥r｝｝＞0，但∫R 1f（x）dx ≠ +∞

15.函数f，处处适合0≤f（x）＜+∞，但在每个非空开区间（a， b）上，∫ba f（x）dx=+∞

16.任给f ∈ L [a， b]，可构造集A ？ [a， b]，使mA=b-a，且对任一r∈R1和任一x∈A，都有limh→0 1/h∫x+h x &seperator f （t）-r&seperatordt=&seperatorf （x）-r&seperator

17. [0， +∞）上的一个非负的上半连续函数f，使∫+∞ 0 f （x）dx=+∞，而对每一h＞0，有∑∞ n=1 f （nh）＜+∞

18. R1上的一个一致有界的（L）可测函数序列｛fn｝，使对任何区间[a， b]， ｛fn ｝中都不存在在[a， b]上几乎处处收敛的子列

19. Lebesgue有界收敛定理中mE＜+∞的条件不可去掉

20. Lebesgue有界收敛定理中函数序列一致有界的条件不可去掉

21. Lebesgue控制收敛定理中控制函数的可积性的条件不可去掉

22. Vitali定理中mE＜+∞的条件不可去掉

23.使Fatou引理中等号不成立的函数序列

24.一个变号的收敛可测函数序列，使Fatou引理的结论不成立

25. Levi定理中函数序列非负性的条件不可去掉

26.两个平方（L）可积的函数，它们的和不是平方（L）可积的

27.一个非负函数f，使f ∈ L21， +∞），但∫+∞1 f（x）/？x dx = +∞

28.不属于任何Lp （0， 1） （p ＞ 0）的非负可测函数

29.属于Lp-δ（0， a）而不属于Lp （0， a）的非负可测函数，其中0＜δ＜p

30.属于L2 （0， +∞）而不属于任何Lp （0， +∞） （p ＞ 0， p≠2）的非负可测函数

31.函数f和g，使{∫E&seperator f （x）+g（x）&seperatorpdx}1/p＞{∫E&seperatorf（x）&seperatorpdx}1/p +{∫E&seperatorg（x）&seperatorpdx}1/p，这里，0＜p＜1

32.连续单调函数g和连续函数f，适合∫01 f （x）dg （x） ≠ ∫0 f（x）g’（x）dx

33.函数f与g，使f关于g是Lebesgue-Stieltjes可积而不是Riemann-Stieltjes可积

34.使limp→+∞&seperator&seperator f&seperator&seperator Lp（E）=&seperator&seperatorf&seperator&seperatorL∞（E）不成立的函数f

35. L∞ （R1）中的一个函数f，使不存在R1上的连续函数序列{fn}，适合limn→∞&seperator&seperatorf-fn&seperator&seperatorL∞（R1） = 0

36. R1上的一个非负（L）可积函数，使对任何非空区间[a， b]，它在[a， b]上都不是本性有界的

37.一个（L）可积函数，它的某个近似连续点不是Lebesgue点

38.存在函数f，使f（x0）是其不定积分在x0的导数，但f在点x0并不近似连续

第十章 不同意义收敛的函数序列

0.引言

1.几乎处处收敛与测度收敛之间的关系

2.近一致收敛与几乎处处收敛之间的关系

3.一致收敛与平均收敛之间的关系

4.几乎处处收敛与平均收敛互不蕴涵

5.几乎处处收敛与弱收敛互不蕴涵

6.测度收敛与弱收敛互不蕴涵

7.近一致收敛与平均收敛互不蕴涵

8.测度收敛而非近一致收敛的函数序列

9.弱收敛而非平均收敛的函数序列

10.r次幂平均收敛而不p（1≤r＜p）次幂平均收敛的函数序列

11. [0， 1]上的一个函数序列｛fn｝，适合&seperator&seperatorfn&seperator&seperatorLr[0，1]≤M （n=1， 2， …）， ｛fn｝在[0， 1]上处处收敛于f，但limn→∞&seperator&seperatorfn-f &seperator&seperatorLr[0 1] ≠ 0

12.一个在E上几乎处处收敛于f的函数序列｛fn｝ ? L（E），使supn&seperator&seperatorfn&seperator&seperator=K＜+∞，而｛fn｝并不弱收敛于f

13. R1上的一个（L）可积的连续函数序列｛fn｝，适合（i） lim&seperatorx&seperator→∞fn（x）=0，（ii） suPn &seperator&seperatorfn&seperator&seperatorL（R1）＜+∞， （iii） ｛fn｝在R1上一致收敛于f，但｛fn｝中不存在子列｛fnk｝使limk→∞ &seperator&seperator fnk-f&seperator&seperatorL（R1）=0

第十一章　有界变差函数与绝对连续函数

0.引言

1.一个非有界变差函数，其绝对值是有界变差函数

2.全变差为无穷大的可微函数

3.不满足任何阶Holder条件的有界变差函数

4.满足α（0＜α＜1）阶Holder条件而不是有界变差的函数

5.不满足任何α（α＞0）阶Holder条件且不是有界变差的连续函数

6.在[0，1]上连续而在[0，1]的任一非空子区间上皆非有界变差的函数

7.在[0， 1]上有界变差而在[0，1]的任一非空子区间上都不连续的函数

8.两个有界变差函数，构成非有界变差的复合函数

9.两个皆非有界变差的函数，构成有界变差的复合函数

10.一个有界变差函数序列，其上确界函数并不有界变差

11.一个一致收敛的有界变差函数序列，其极限函数并不有界变差

12.一个不是有界变差的函数序列，却一致收敛于一个有界变差函数

13.一个有界变差函数序列，它的任何子列都有不收敛的点

14.一个有界变差函数序列，其全变差并不一致有界，但有收敛的子列

15.任给不连续函数f，可构造一个有界变差函数g，使f关于g的积分∫a f （x）dg（x）不存在

16.任给全变差为无穷大的函数g，可构造一个连续函数f，使f关于g的

积分∫b a f（x）dg（x）不存在

17.一个一致收敛的有界变差的函数项级数，而不能几乎处处逐项微分

18.一个可微的有界变差函数f，使V （x）=∫x 0 &seperatorf’（t）&seperatordt不可微

19.[0， 1]上的一个有界变差函数f，使V1 0 （f） ∫+∞-∞K（y）dy，其中K（y）代表适合f （x）=y的x的个数

20.非常值的局部循环的无处单调的有界变差函数

21.[0，2π)上的一个一致收敛于某个有界变差函数f的有界变差函数序列{fn }，使limn→∞V2 π0（fn） ≠ V2π0（f）

22.[0，1]上的一个可微函数f，使Z={x：f’（x）=0}及Zc均在[0，1]中稠密，但f’在[0，1]上并不（L）可积

23. [0，1]上的一个可微函数f，使f’有界且Z={x：f’ （x）=0}及Zc在[0，1]内稠密，Z≠ {x：f’在x连续}

24.一个绝对连续函数f，使&seperatorf&seperatorp （0＜p＜1）不是绝对连续函数

25.一致连续而不绝对连续的函数

26.两个绝对连续函数，构成不绝对连续的复合函数

27.两个皆非绝对连续的函数，而构成绝对连续的复合函数

28.不满足某些Holder条件的绝对连续函数

29.无处单调的绝对连续函数

30.一个可微函数，其导数在任何非空区间上（L）可积而不（R）可积

31.一个具有性质（N）的函数，它不是绝对连续的函数

32.一个一致收敛的绝对连续函数序列，其极限函数并不绝对连续

33.一个不是绝对连续的函数序列，却一致收敛于一个绝对连续的函数

34.任给[0，1]中测度为零的集E，可构造[0，1]上的一个不减的绝对连续函数f，使对每一x∈E，都有f’（x）=+∞

35.一个严格递增的连续函数，它并不绝对连续

36.一个在[0， 1]上严格递增的连续函数，它在任何非空区间[α， β]？[0，1]上都不是绝对连续的

37.一个严格递增的绝对连续函数，它把某个测度大于零的集映成测度等于零的集

38.一个严格递增的绝对连续函数，其反函数并不绝对连续

第十二章 Fourier级数

0.引言

1. Dini判敛法和Jordan判敛法互不蕴涵

2. Young判敛法与Dini判敛法互不蕴涵

3. Young判敛法与de la Vallee Poussin判敛法互不蕴涵

4． Jordan判敛法失效但能用de la Vallee Poussin判敛法的Fourier级数

5． Jordan判敛法失效但能用Young判敛法的Fourier级数

6． Dini判敛法失效但能用de la Vallee Poussin判敛法的Fourier级数

7.一个处处收敛的三角级数，其和函数并不（L）可积

8.一个收敛的三角级数，它不是某个（L）可积函数的Fourier级数

9.一个三角级数，它不是Fourier-Lebesgue级数，但却是Fourier-Stieltjes级数

10.任给趋于零的正数序列｛εn｝，可构造连续函数f，使f的Fourier系数有以下关系：&seperatoran &seperator≥εn或&seperatorbn&seperator≥εn对无穷多个n成立

11.一个（R）可积函数，其Fourier-Riemann系数并不趋向于零

12.任给数列｛λn｝， limn→∞λn=+∞， λn=o（n），可构造（R）可积函数f，它的Fourier-Riemann系数bn＞λn对无穷多个n成立

13.一个连续函数f，使对任何ε＞0，级数∑№2（&seperatoran&seperator2-ε+&seperatorbn&seperator2-ε）发散，其中an， bn是f的Fourier系数

14. Hα[0， 2π]（0＜α≤1）中的一个函数f，使级数∑№2（&seperatoran&seperatorβ+&seperatorbn&seperatorβ）发散，其中β=2/（2α + 1）

15. H 1/2 [0，＜α＜1]中的一个函数，其Fourier级数并不绝对收敛

16.一个三角级数，它在某个可数集上收敛，但其系数并不趋向于零

17.系数趋于零而又处处发散的三角级数

18. Hα[0，2π]（0＜α＜1）中的一个函数，其Fourier系数cn ≠o（n-α）

19.一个连续的有界变差函数，其Fourier系数不等于o（1/n）

20.一个余弦级数，其系数单调递减且趋向于零，但其和函数并不（L）可积

21.一个有界变差函数，其Fourier级数并不绝对收敛

22.一个（L）可积函数f，使级数∑№1an/n发散，其中an=1/π∫π-πf（x） cos nxdx

23.一个以2π为周期的连续函数，其Fourier级数仅仅在x=0 （mod 2π）这些点发散，而在x≠0（mod2π）各点收敛

24. L [0， 2π]中的一个函数f，其Fourier级数在[0，2π]上几乎处处无界发散

25.一个Fourier级数，其共轭级数不是Fourier级数

26.一个（L）可积函数，其共轭函数在任何非空闭区间上都不（L）可积

27. L[0， 2π]中的一个函数，其Fourier级数在[0，2π]上几乎处处有界发散

28.L（ln+ ln+L）1-ε中的一个函数，其Fourier级数几乎处处发散

29. [0，2π]上的一个（L）可积函数f，它的共轭函数f也是（L）可积的，并且f与f的Fourier级数在[0，2π]上都是几乎处处发散的

30.任给Fσ型集E？[0，2π]，可构造函数f∈L[0， 2π]，它的Fourier级数在E上收敛，而在[0，2π]\ E上为无界发散

第十三章 平面点集

0.引言

1.序列｛xn｝与｛yn｝均有聚点，而｛（xn，yn）｝没有聚点

2.一个可数集E，使E’具有连续统的势，且E∩E’=？

3.具有不可数闭包的孤立点集

4.距离为零的两个不相交的闭集

5.平面上的一个开集，它不能表成有限个或可数个两两不相交的开区间的并集

6.单位正方形内的一个可测子集，它不能表成可数个“矩形”的并集

7.一个平面点集E，一方面E可表成两个不相交的集A与B的并，另一方面，E分别与A及B可合

8.平面完备疏集※Sierpinski地毯、Sierpinski墓垛和Cantor栉

9.任给实数a（0＜a＜1），可在[0， 1] × [0，1]中构造一个完备疏集E，满足mE=a

10. Sierpinski连续点集

11.平面上的一个（L）可测集，它在坐标轴上的射影都不是（L）可测的

12.单位正方形[0， 1] × [0，1]内的一个子集，它在[0，1] × [0，1]内稠密，但在任一平行于坐标轴的直线上都是无处稠密的

13.单位正方形I=[0， 1] × [0， 1]的一个子集A在I内稠密，而且与I相交的每一条铅直或水平直线恰好交A于一点

14.平面内的一个稠密集，它不含有三个共线的点

15.与任一直线至多有两个公共点的不可测平面集

16.区间[0， 1]到正方形[0， 1] × [0，1]上的一个映射

17.充实空间的连续曲线

18.充实空间的连续曲线的简单例题

19. R3内的一条简单弧，它在平面上的投影成为一个三角形

20. [0，1]到[0，1]上的一个连续映射，每个值取的次数不可数

21. Cantor曲线、Jordan曲线和平面上连接区域的边界，这三个概念两两相异

22.不可求长的简单弧

23.不可求长并在每一点都有切线的简单弧

24.每两个不同点之间的弧段长度无限的简单弧

25. [0，1]上的一个递增的连续函数f（x），它所对应的曲线之长不能用（L）积分∫01？1+[f’（x）]2dx来表示

26.一个有界变差函数，使limδ→0s（△）=s不成立

27.一个不连续函数，而有limδ→0 s（△）=s

28.单位正方形内的一条简单弧，其平面测度可以任意接近1

29.有共同边界的四个两两不相交的平面区域

30.与自己的闭包的内部不同的平面区域

31.与自己的闭包的内部相等的非Jordan区域

32.边界的测度为正数的有界平面区域

33.图形为不可测平面集的单实变实值函数

34.没有面积的有界平面集

35.没有面积的紧平面集

36.没有面积的有界平面区域

37.没有面积的有界平面Jordan区域

38.一条简单闭曲线，它的平面测度比它围成的有界区域的平面测度还要大

39.一个曲面，它的内接多面体的面积不收敛于它的面积

第十四章　二元函数

0.引言

1.两个累次极限都存在而不相等的函数

2.两个累次极限存在且相等，但二重极限不存在的函数

3.二重极限存在而两个累次极限都不存在的函数

4.二重极限和一个累次极限存在，而另一个累次极限不存在的函数

5.仅有一个累次极限存在的函数

6.在原点没有极限，但沿着任一直线逼近原点时极限值都为零的函数

7.分别对各个变量连续的间断函数

8.函数f （x，y），它沿着从点（x0， y0）引出的任何直线在（x0，y0）都是连续的，但f（x，y）在（x0， y0）并不连续

9.[0，1] × [0， 1]上的一个无处连续函数f （x， y），使对每一y∈ [0， 1]， f（x，y）是x的连续函数

10.具有各阶偏导数的不连续函数

11.二阶混合偏导数相等而不连续的函数

12.函数f，使fx （0， y）是y的连续函数，而fy （x， 0）不是x的连续函数

13.两个偏导数在某点连续，而本身在该点的任何邻域内不连续的函数

14.偏导数存在，但沿任何其他方向的导数都不存在的函数

15.函数f，使fy x（x，y）存在而fx（x，y）不存在

16.仅在一点连续并可微的函数

17.可微而不连续可微的函数

18.函数f，它在某点的邻域内连续且有有界的偏导数，但f在该点仍不能微分

19.偏导数均不连续的可微函数

20.二阶混合偏导数不相等的可微函数

21.在某点沿任何方向可微，而在该点并不连续的函数

22.有关的一切偏导数都存在，但复合函数求导公式不成立的函数

23.在平面区域D内fy（x，y）？0，但是f在D内并非与y无关的连续可微函数

24.函数F（x， y），尽管Fy （x0， y0）=0，但在（x0，y0）的某个邻域内，由方程F（x， y） = 0能唯一确定y为x的函数y= f （x），并且y 0 = f（x0）

25.函数f，使maxy minx f（x，y）＜minx maxy f （x， y）

26.函数f，使fx（x0，y0）=0， fy（x0，y0）=0，但（x0，y0）并非f（x，y）的极值点

27.一个可微函数，它在定义域内只有一个驻点，而且这驻点是局部极大（小）点，但它不是最大（小）点

28.函数f，它在某点的偏导数不存在，但能在该点取得极值

29.有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数

30.函数f，它在原点无局部极值，但对任一过原点的直线，f沿此直线上，原点为其取得局部极小值的点

31.函数f （x，y），对每一x，它是y的Borel可测函数，对每一y，它是x的Borel可测函数，但f （x，y)并不（L）可测

第十五章 二重积分

0.引言

1.两个（R）累次积分存在而不相等的函数

2.两个（R）累次积分存在且相等，但（R）二重积分不存在的函数

3. （R）二重积分存在而两个（R）累次积分都不存在的函数

4. （R）二重积分不存在，而只有一个（R）累次积分存在的函数

5. （R）二重积分存在，但只有一个（R）累次积分存在的函数

6.一个发散的广义（R）二重积分，它的两个累次积分都存在

7.广义（R）二重积分∫1 0 ∫1 0f（x，y）dxdy存在，且对每一x∈[0，1]，积分∫1 0 f（x，y）dy存在，但累次积分∫0 dx ∫0 f （x， y）dy不存在的函数f

8.函数f （x）与g（y），它们分别在0≤x＜+∞与0≤y＜+∞上广义（R）可积，但f（x）g（y）在[0， +∞） × [0， +∞）上并不广义（R）可积

9．[0， 1] × [0， 1]上的一个（L）可积函数f（x，y），而并不对每一x ∈ [0， 1]，使把f （x， y）看作y的函数时，它在[0，1]上是（L）可积的

10． [0， 1] × [0，1]上的一个不可测函数，它的两个（L）累次积分均存在且相等

11．[0， 1] × [0， 1]上一不可测函数，它的一个（L）累次积分存在而另一个不存在

12． [0， 1] × [0， 1]上的一个不可测函数，它的两个（L）累次积分存在而不相等

13.一个可测函数，它的两个（L）累次积分一个存在而另一个不存在

14.一个可测函数，它的两个（L）累次积分存在而不相等

15.一个可测函数，它的两个（L）累次积分存在且相等，但它并不（L）可积

16．[0， 1] × [0， 1]上的一个函数f，使对任意可测集E ？ [0，1]， F ？ [0， 1]，恒有∫E dx ∫F f（x，y）dy=∫F dy∫ E f（x，y）dx，但f在[0，1] × [0， 1]上仍不（L）可积

17.一个间断函数f，使∫1 0 f（x，y）dx是连续函数

18.函数f，使∫1 0 f（x，y）dx是间断函数

19.一个连续函数f，使∫+ ∞ 0 f（x，y）dx是间断函数

20.一个一致收敛的参变量积分，不能以与参数无关的收敛积分为优函数

参考文献

名词索引